

Modelli tradizionali e **statistici** applicati alla percezione (2/2)

Francesco Panerai



Elementi di statistica bayesiana

- Probabilità condizionale
- Legge di probabilità totale
- Regola di Bayes

Approccio bayesiano

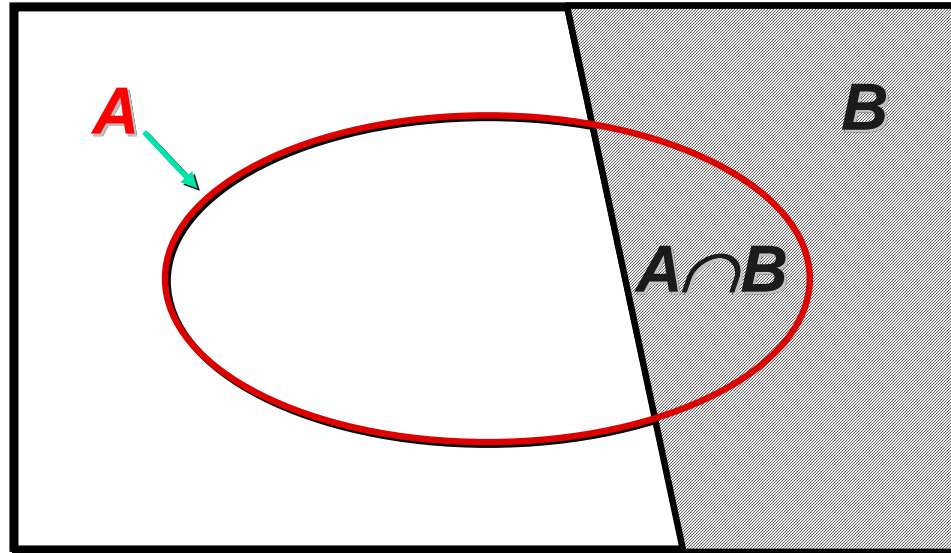
- ❑ Bayes fornisce una **regola matematica** per spiegare come cambiare le proprie regole di decisione sulla base di **nuove esperienze**
- ❑ **Esempio** : un neonato osserva il suo primo tramonto e si chiede se il sole nascerà di nuovo o no. Assegna probabilità a priori uguali ad entrambe le possibilità (-> una pallina bianca ed una nera). Alla nascita del sole, il neonato mette da parte una pallina bianca. Gradualmente la propria esperienza cambia le regole di credenza e quindi la propria decisione.
- ❑ L'integrazione **multi-sensoriale** implica problematiche di statistica importanti e difficili, poiché le modalità sensoriali non sono tutte ugualmente affidabili e la loro affidabilità può cambiare col contesto.



1702-1761

probabilità condizionale e regola di Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

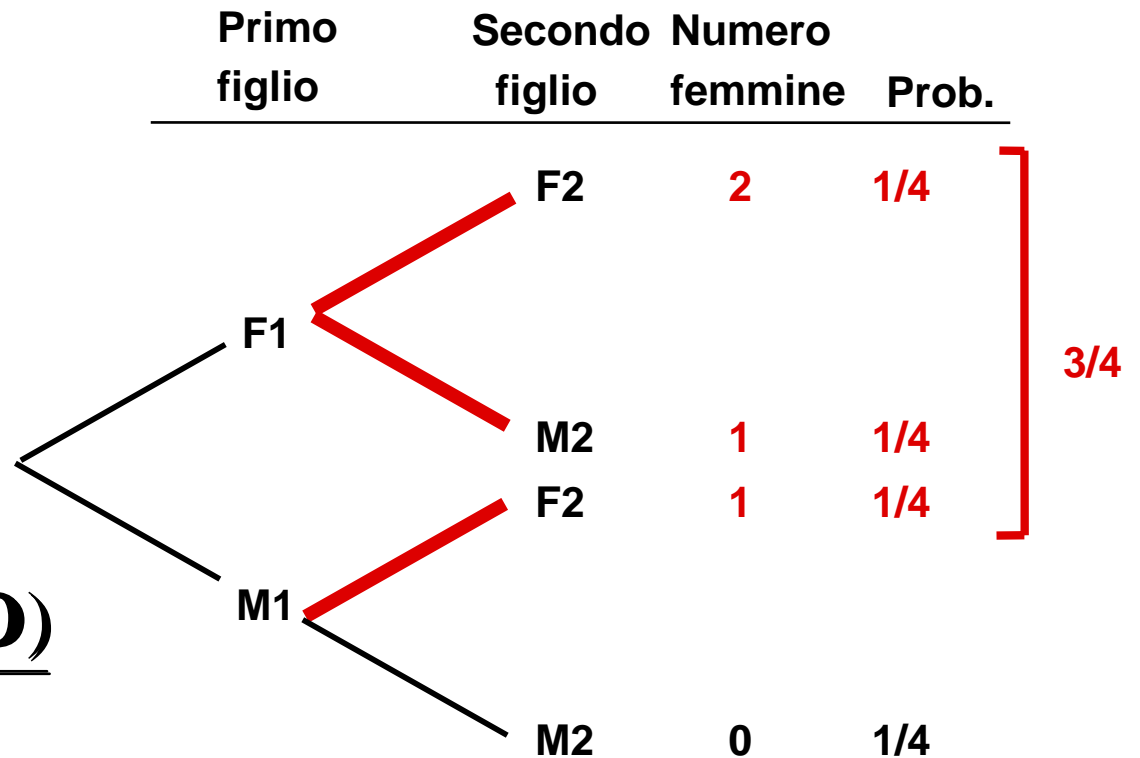


ovvero

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

Probabilità Condizionale e alberi. Esempio : quante femmine?

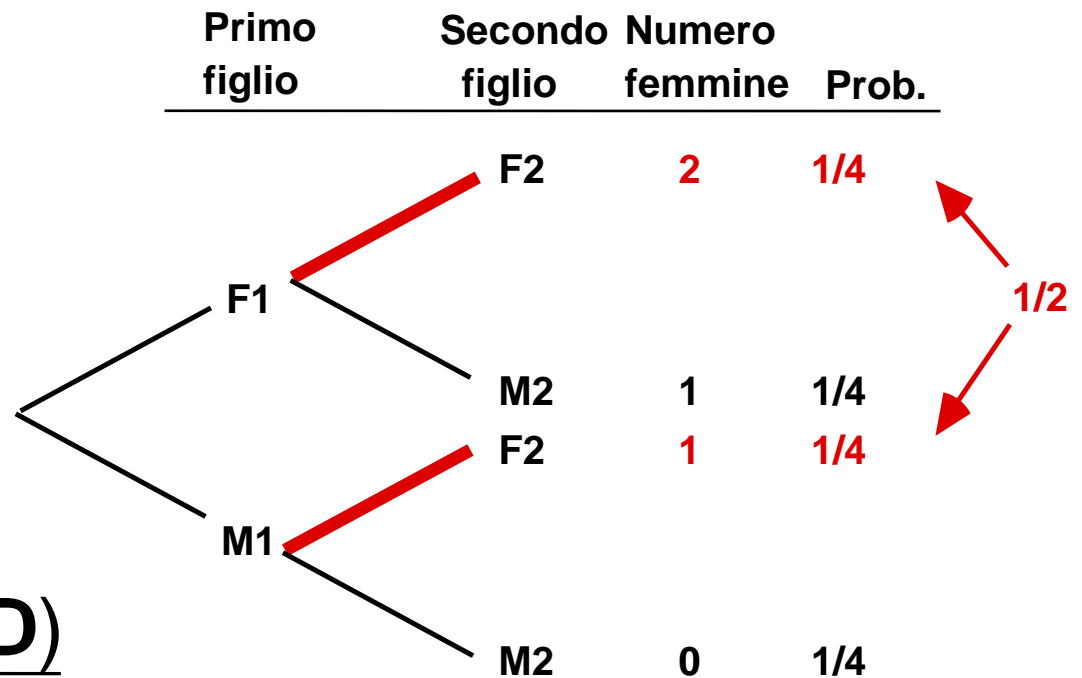
- Famiglia, 2 bambini
- D: Entrambe femmine
- C: Almeno una femmina



$$\begin{aligned}
 \mathbf{P(D | C)} &= \frac{\mathbf{P(C \cap D)}}{\mathbf{P(C)}} \\
 &= \frac{\mathbf{P(F1 \cap F2)}}{\mathbf{P(C)}} = \frac{\mathbf{1/4}}{\mathbf{3/4}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}
 \end{aligned}$$

...contrariamente, condizione su F2:
Quante femmine ?

- Famiglia, 2 bambini
- D: Entrambe femmine
- F2: Seconda é femmina



$$\begin{aligned}
 P(D | F2) &= \frac{P(F2 \cap D)}{P(F2)} \\
 &= \frac{P(F1 \cap F2)}{P(F2)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

legge di probabilità totale

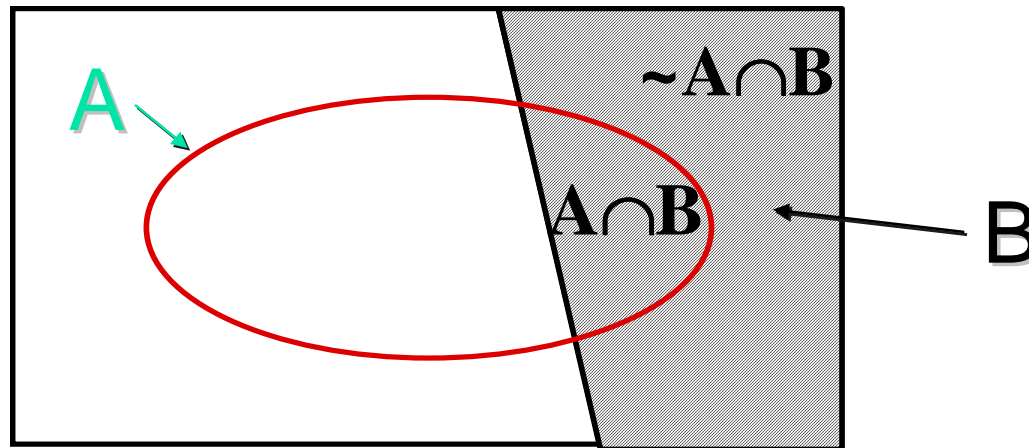
Regola di moltiplicazione

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$$

Legge di probabilità totale:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(\sim A \cap B) \\ &= P(B|A)P(A) + P(B|\sim A)P(\sim A) \end{aligned}$$





regola di Bayes

Regola sulle probabilità inverse:

$$\begin{aligned} \mathbf{P(A | B)} &= \frac{\mathbf{P(A \cap B)}}{\mathbf{P(B)}} = \frac{\mathbf{P(B | A)P(A)}}{\mathbf{P(B)}} \\ &= \frac{\mathbf{P(B | A)P(A)}}{\mathbf{P(B | A)P(A) + P(B | \sim A)P(\sim A)}} \end{aligned}$$

[L'espansione di $P(B)$ a denominatore é la legge di probabilità totale.]



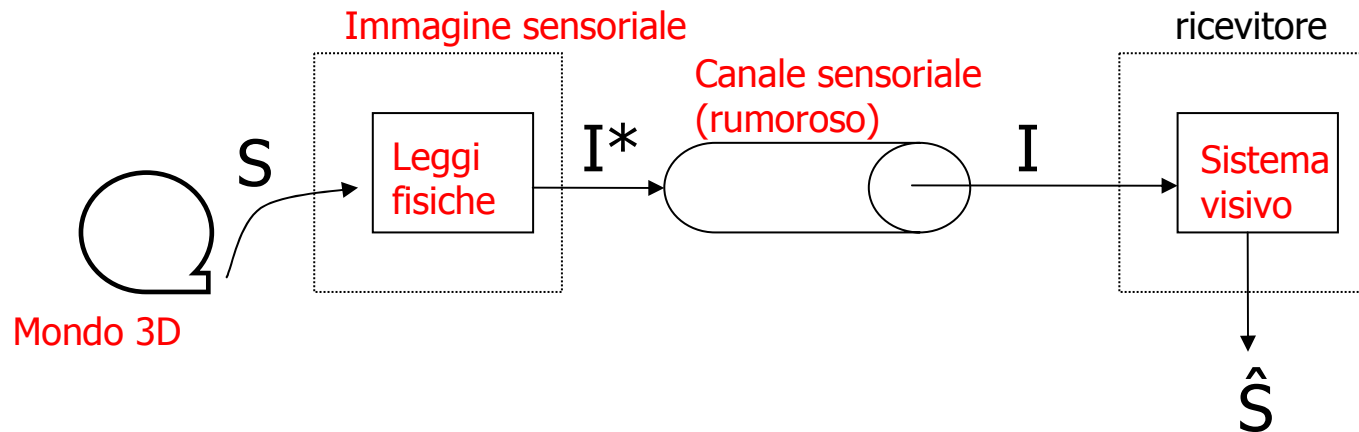
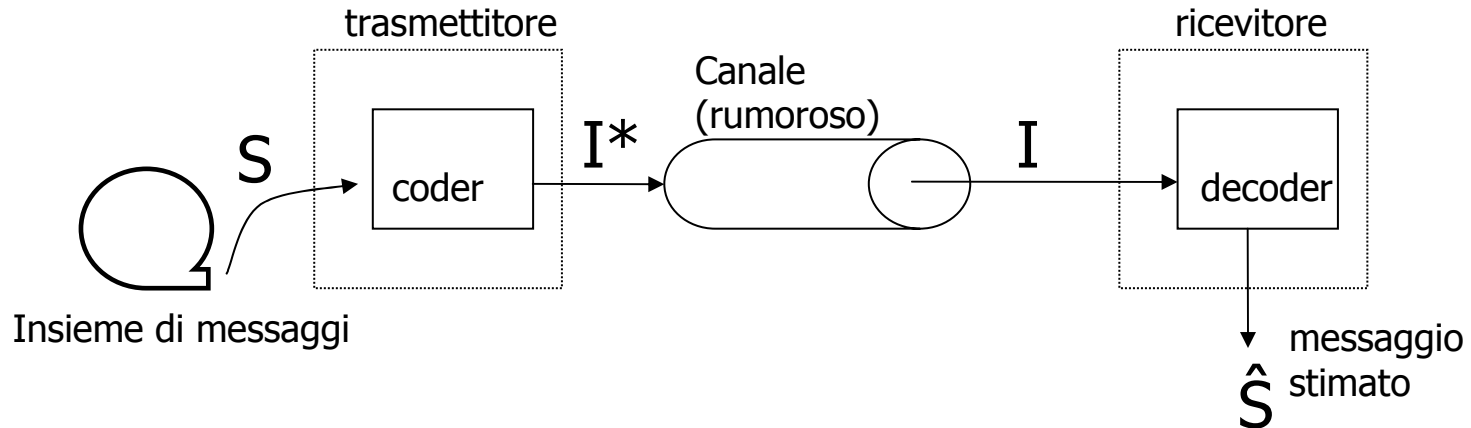
regola di Bayes: versioni alternative

$$\mathbf{P(A | B)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1 + \frac{P(B | \sim A) P(\sim A)}{P(B | A) P(A)}}}$$

$$\frac{\mathbf{P(\sim A | B)}}{\mathbf{P(A | B)}} = \frac{\mathbf{P(B | \sim A) P(\sim A)}}{\mathbf{P(B | A) P(A)}}$$

dove B é "dato" e A é un "ipotesi"
quantità post. = rapp. probabilità X quantità priori

Modello della percezione come problema di comunicazione (*information processing approach*)



Decodificare un messaggio per il sistema visivo significa determinare le proprietà di interesse nella scena (e.g. distanza di un oggetto)



Decodifica : specificità

In generale il problema della decodifica è complicato :

- ❑ segnale (I) é **limitato in banda**
- ❑ segnale (I) é **rumoroso**
- ❑ il segnale (I) **non é completamente invertibile**, poiché la trasformazione $3D \rightarrow 2D$ determina una perdita di specificità [vedi esempio $R = f^{-1}(I, D)$]

...ma é possibile semplificare questi problemi ?



Decodifica : proprietà intrinseche

Due proprietà consentono di migliorare la soluzione del problema:

- ❑ associare all'insieme dei messaggi una statistica descrittiva
- ❑ stimare caratteristiche di alto livello dei segnali (parametri) piuttosto che ricostruirlo completamente (e.g. data la forma del segnale, determinarne l'ampiezza)

La conoscenza di **tali proprietà** consente di semplificare il problema della decodifica



Decodifica: analogia col sistema visivo

Il problema di percezione incontrato dal sistema visivo é definito una volta identificati 4 componenti:

- proprietà della scena da stimare (e.g. parametri 3D)
- struttura statistica dell'insieme dei messaggi (struttura della scena nel mondo)
- schema di codifica utilizzato nel dominio sensoriale (colori, flusso ottico, gradienti di tessitura, dimensioni relative...). Tale schema é basato su leggi fisiche.
- Le caratterizzazione del rumore che si aggiunge al segnale

Gli ultimi 3 termini rappresentano il **contenuto informativo** dei segnali sensoriali (delle immagini)



Idee di base: modello bayesiano della percezione

Caratterizzare l'informazione del mondo 3D contenuta nelle immagini mediante distribuzioni di probabilità. Una distribuzione di probabilità definisce un'incertezza di una proprietà della scena (S) di interesse, che può assumere diversi stati (valori). La forma esatta delle distribuzioni (prob. a posteriori) é determinata:

- ❑ dal processo di **formazione dell'immagine** (compresa la natura del rumore)
- ❑ dalle leggi **statistiche** del mondo

...questi due fattori sono **combinabili** mediante **le regole di Bayes**

Rappresentazione bayesiana del problema di decodifica

Sistema di comunicazione

Percezione

Parametri di interesse nei messaggi

Proprietà di interesse della scena (**S**)

Info

Statistica messaggi

Schema di codifica

Statistica rumore

Prob. priori:
 $p(\mathbf{I} / \mathbf{S})$

Formazione
immagine

Statistica rumore

Likelihood:
 $p(\mathbf{I} / \mathbf{S})$

Prob.
posteriori:
 $p(\mathbf{I} / \mathbf{S})$



Idee generali

- ❑ La percezione si basa su regole statistiche di inferenza statistica
- ❑ Il cervello immagazzina conoscenza relativa alla probabilità $P(I, S)$, dove I é l'immagine sensoriale (e.g. immagine 2D) e S é la variabile percettiva che rappresenta proprietà 3D di interesse nella scena.
- ❑ Data un immagine sensoriale I , il cervello calcola $P(S | I)$

$$P(S | I) = \frac{P(I, S)}{P(I)} = \frac{P(I | S) P(S)}{P(I)}$$



Idee generali: decisioni

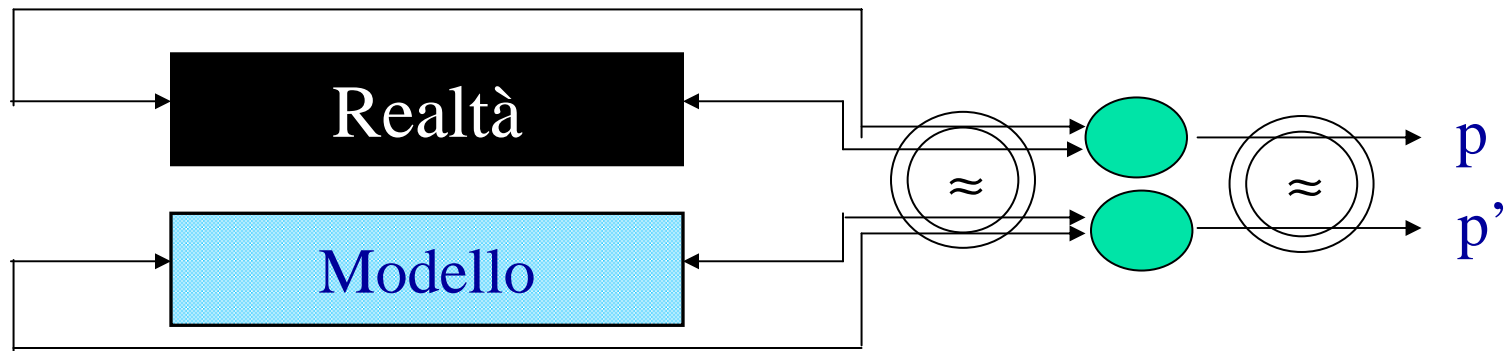
□ Le decisioni vengono prese riducendo la distribuzione ad un singolo valore (MAP – maximum a posterior decision rule):

$$\hat{S} = \arg \max_{\mathbf{v}} P(S | \mathbf{I})$$

oppure:

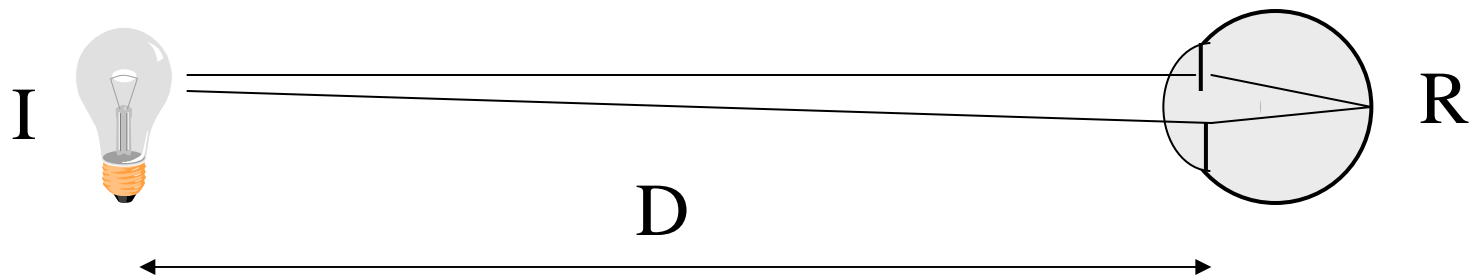
$$\hat{S} = \int P(S | \mathbf{I}) S dS$$

Vincoli e modelli interni: riflesso delle regolarità del mondo ?



- Il SNC rappresenta delle distribuzioni di probabilità, i.e. rappresenta l'**incertezza** associata ad ogni stimolo sensoriale
- Il SNC immagazzina **modelli generativi** (i.e. forward) del mondo 3D (e.g. $P(I|S)$)
- **Inferenze statistiche** complesse sono realizzate da reti neuronali biologiche

Esempio



Modello diretto: $R = f(I, D)$

Modello inverso: $(I, D) = f^{-1}(R)$

Vincolo: $p(I, D, R)$ max. ou $c(I, D, R)$ min. \Rightarrow il SNC rappresenta dei vincoli per tutte le variabili



Modello bayesiano della percezione di movimento 2D

□ Per un osservatore bayesiano il movimento 2D sulla retina risulta dal prodotto di una funzione di incertezza (**likelihood**) basata su un'evidenza osservata e su una prob. a priori (**prior**) derivata da conoscenza a priori. Tale prodotto è detto prob. a posteriori (**posterior**):

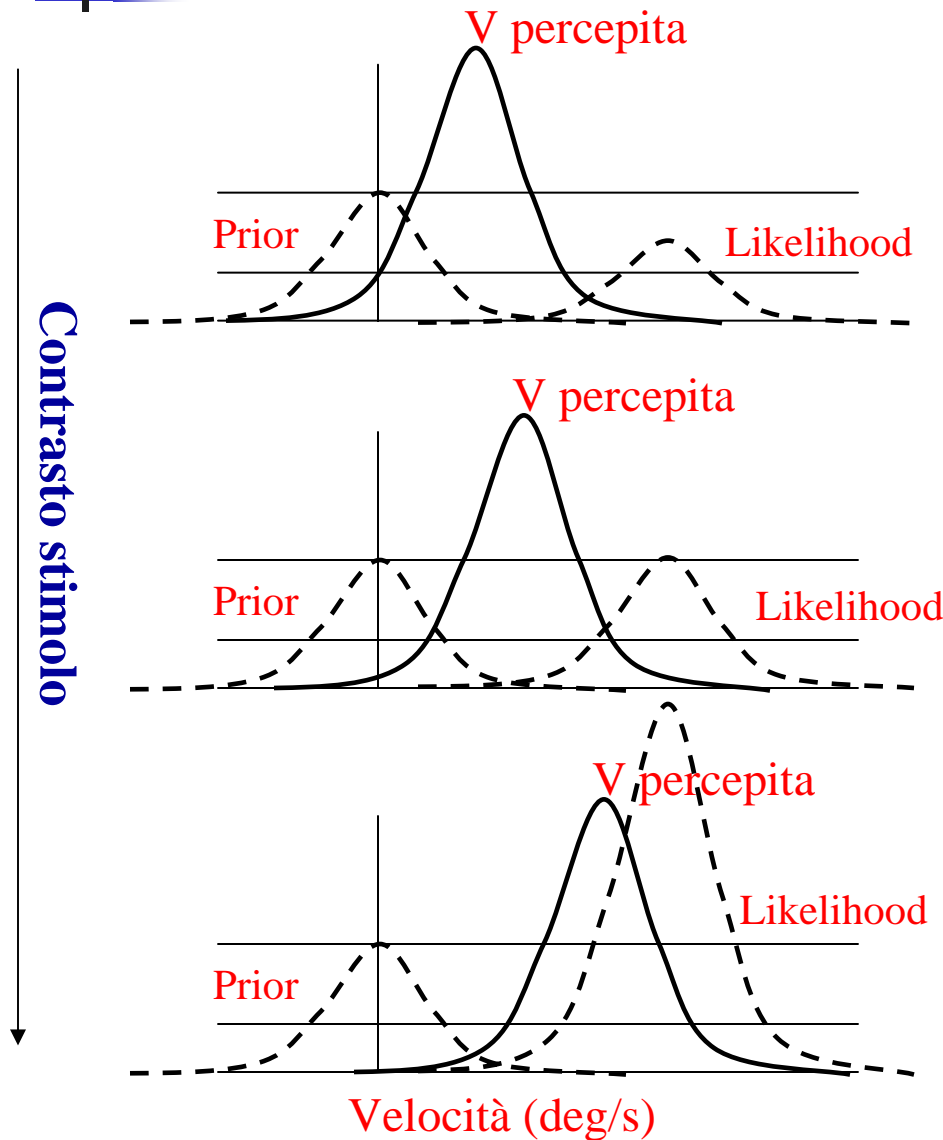
$$\text{Posterior} = \text{Prior} \times \text{Likelihood}$$

□ La velocità percepita è quella che massimizza la prob. a posteriori:

$$\text{Posterior} (v_p) = \max (\text{Posterior})$$

□ **Weiss, Simoncelli e Adelson (1991) – movimento 2D**

Modello bayesiano per la stima della velocità 2D



- ❑ 1a curva tratteggio = **prior**, centrata sulla velocità zero
- ❑ 2a curva tratteggio = **likelihood**, centrata sulla velocità dello stimolo 2D
- ❑ curva continua = **posterior**, é ottenuta moltiplicando le prime due
- ❑ La localizzazione del picco definisce la velocità percepita (V_p)
- ❑ I tre casi corrispondono a differenti contrasti dello stimolo

Predizione: riduzione della velocità percepita con il contrasto