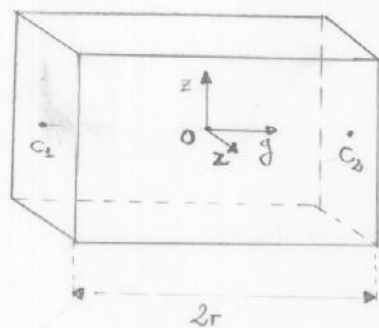
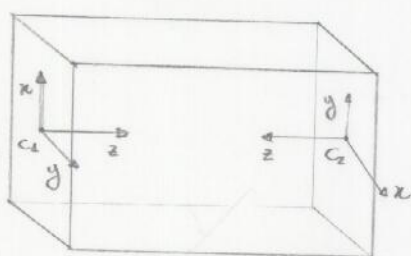




Si calcolino la matrice di grasp G e il cono di attrito FC per l'oggetto in figura sapendo che in C_1 e C_2 agiscono due contatti di tipo soft-finger con coefficienti di attrito μ e coefficiente di attrito torsionale δ .

Come prima cosa vediamo di posizionare i sistemi di riferimento nei punti di contatto secondo la convenzione vista a lezione:



A questo punto è necessario costruire la matrice G secondo la seguente struttura:

$$G = [G_1 \quad G_2], \quad G_i = \begin{bmatrix} R_{oi} & 0 \\ S(p_{oi})R_{oi} & R_{oi} \end{bmatrix} B_{ci}, \quad B_{ci} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$FC_i = \{f \in \mathbb{R}^4 : \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \leq \mu f_3, f_3 \geq 0, |f_4| \leq \delta f_3\}$$

Cominceremo con il calcolare R_{oi} e p_{oi} cioè la descrizione della trasformazione rigida che porta da C_i a O .

$$R_{oc1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad p_{oc1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow S(p_{oc1}) = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 \\ r & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_{oc2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad p_{oc2} = \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow S(p_{oc2}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 \\ -r & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & r & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & r & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & r & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ r & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & r & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -r & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

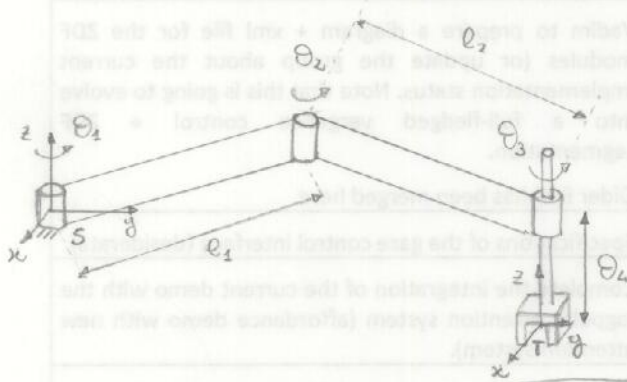
$$G = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -r & 0 & 0 & 0 & r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$FC = FC_1 \times FC_2 \subset \mathbb{R}^8$$

$$FC_1 = \left\{ p \in \mathbb{R}^4 : \sqrt{p_1^2 + p_2^2} \leq \mu p_3, p_3 \geq 0, |p_4| \leq \gamma p_3 \right\}$$

$$FC_2 = \left\{ p \in \mathbb{R}^4 : \sqrt{p_1^2 + p_2^2} \leq \mu p_3, p_3 \geq 0, |p_4| \leq \gamma p_3 \right\}$$

Esercizio 2



Si calcoli la velocità del sistema di riferimento $\langle T \rangle$ rispetto al sistema di riferimento $\langle S \rangle$ in coordinate body (V_{ST}^B) in funzione delle velocità ai giunti $\dot{q}$, $q = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4]^T$.

Si evidenzii in particolare la seguente struttura:

$$V_{ST}^B = Ad_{ST}^{-1} J_{ST}^S \dot{q}$$

Abbiamo visto che V_{ST}^B ha la seguente struttura:

$$V_{ST}^B = Ad_{ST}^{-1} Ad_{ST} \underbrace{\begin{bmatrix} R_{ST}^T & 0 \\ 0 & R_{ST}^T \end{bmatrix}}_{J_{ST}^S} J(q) \dot{q}$$

dove $J(q)$ è lo jacobiano geometrico ed unitario:

$$Ad_{ST} = \begin{bmatrix} R_{ST} & S(p_{ST}) R_{ST} \\ 0 & R_{ST} \end{bmatrix}$$

$$Ad_{ST}^{-1} = \begin{bmatrix} R_{ST}^T & -R_{ST}^T S(p_{ST}) \\ 0 & R_{ST}^T \end{bmatrix} = Ad_{TS}$$

Cominciamo con il calcolo della cinematica diretta:

$$R_{ST} = \begin{bmatrix} c_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} & -s_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} & 0 \\ s_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} & c_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad p_{ST} = \begin{bmatrix} -l_1 s_{\theta_1} - l_2 s_{\theta_1+\theta_2} \\ l_1 c_{\theta_1} + l_2 c_{\theta_1+\theta_2} \\ \theta_4 \end{bmatrix}$$

che rappresentano la trasformazione rigida da $\langle T \rangle$ ad $\langle S \rangle$. Calcoliamo ora lo jacobiano geometrico, partendo dal calcolo della velocità di $\langle T \rangle$ rispetto ad $\langle S \rangle$ come funzione di $\dot{p}_{ST}$ e ω_{ST} , infatti abbiamo:

$$J(q) \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{p}_{ST} \\ \omega_{ST} \end{bmatrix}$$

$$\dot{p}_{ST} = \begin{bmatrix} -l_1 c_{\theta_1} \dot{\theta}_1 - l_2 c_{\theta_1+\theta_2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ -l_1 s_{\theta_1} \dot{\theta}_1 - l_2 s_{\theta_1+\theta_2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 c_{\theta_1} - l_2 c_{\theta_1+\theta_2} & -l_2 c_{\theta_1+\theta_2} & 0 & 0 \\ -l_1 s_{\theta_1} - l_2 s_{\theta_1+\theta_2} & -l_2 s_{\theta_1+\theta_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix}$$

$$S(\omega_{ST}) = \dot{R}_{ST} R_{ST}^T = \begin{bmatrix} -s_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) & -c_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) & 0 \\ +c_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) & -s_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} & s_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} & 0 \\ -s_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} & c_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) & 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}\right)$$

$$\omega_{ST} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix}$$

$$J(q) = \begin{bmatrix} -l_1 c_{\theta_1} - l_2 c_{\theta_1+\theta_2} & -l_2 c_{\theta_1+\theta_2} & 0 & 0 \\ -l_1 s_{\theta_1} - l_2 s_{\theta_1+\theta_2} & -l_2 s_{\theta_1+\theta_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{ST}^S = \begin{bmatrix} R_{ST} & S(p_{ST}) R_{ST} \\ 0 & R_{ST} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{ST}^T & 0 \\ 0 & R_{ST}^T \end{bmatrix} \quad J(q) = \begin{bmatrix} I & S(p_{ST}) \\ 0 & I \end{bmatrix} J(q)$$

$$S\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{ST}^S = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -p_{ST}^y & p_{ST}^x \\ 0 & 1 & 0 & p_{ST}^y & 0 & -p_{ST}^x \\ 0 & 0 & 1 & -p_{ST}^x & p_{ST}^y & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|cc} -l_1 c_{\theta_1} - l_2 c_{\theta_1+\theta_2} & -l_2 c_{\theta_1+\theta_2} & 0 & 0 \\ -l_1 s_{\theta_1} - l_2 s_{\theta_1+\theta_2} & -l_2 s_{\theta_1+\theta_2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} -l_1 c_{\theta_1} - l_2 c_{\theta_1+\theta_2} + p_{ST}^y & -l_2 c_{\theta_1+\theta_2} + p_{ST}^y & p_{ST}^y & 0 \\ -l_1 s_{\theta_1} - l_2 s_{\theta_1+\theta_2} - p_{ST}^x & -l_2 s_{\theta_1+\theta_2} - p_{ST}^x & -p_{ST}^x & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & l_1 c_{\theta_1} & l_1 c_{\theta_1} + l_2 c_{\theta_1+\theta_2} & 0 \\ 0 & l_1 s_{\theta_1} & l_1 s_{\theta_1} + l_2 s_{\theta_1+\theta_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Calcoliamo Ad_{ST}^{-1} sfruttando la relazione $Ad_{ST}^{-1} = Ad_{TS}$ in cui sappiamo che:

$$(R_{TS}, p_{TS}) = (R_{ST}^T, -R_{ST}^T p_{ST})$$

$$R_{TS} = \left[\begin{array}{ccc} c_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} & s_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} & 0 \\ -s_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} & c_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$p_{TS} = \left[\begin{array}{ccc} c_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} & s_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} & 0 \\ -s_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} & c_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} l_1 s_{\theta_1} + l_2 s_{\theta_1+\theta_2} \\ -l_1 c_{\theta_1} - l_2 c_{\theta_1+\theta_2} \\ -\theta_4 \end{array} \right]$$

$$= \left[\begin{array}{c} c_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} (l_1 s_{\theta_1} + l_2 s_{\theta_1+\theta_2}) - s_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} (l_1 c_{\theta_1} + l_2 c_{\theta_1+\theta_2}) \\ -s_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} (l_1 s_{\theta_1} + l_2 s_{\theta_1+\theta_2}) - c_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} (l_1 c_{\theta_1} + l_2 c_{\theta_1+\theta_2}) \\ -\theta_4 \end{array} \right]$$

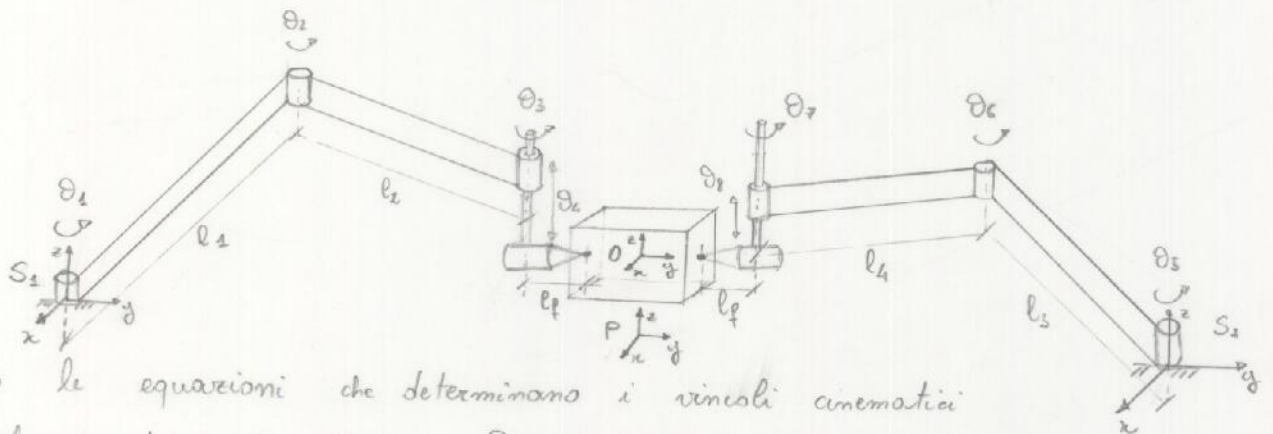
$$= \left[\begin{array}{c} l_1 (c_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} s_{\theta_1} - s_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} c_{\theta_1}) + l_2 (c_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} s_{\theta_1+\theta_2} - s_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} c_{\theta_1+\theta_2}) \\ -l_1 (s_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} s_{\theta_1} + c_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} c_{\theta_1}) - l_2 (s_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} s_{\theta_1+\theta_2} + c_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} c_{\theta_1+\theta_2}) \\ -\theta_4 \end{array} \right]$$

$$R_{TS} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 \\ -\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_{TS} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\theta_1 + \theta_3) - l_2 \sin \theta_3 \\ -l_1 \cos(\theta_1 + \theta_3) - l_2 \cos \theta_3 \\ -\theta_4 \end{bmatrix}$$

$$Ad_{TS} = \begin{bmatrix} R_{ST} & S(p_{ST}) R_{ST} \\ 0 & R_{ST} \end{bmatrix}, \quad S(p_{ST}) = \begin{bmatrix} 0 & -p_{ST}^z & p_{ST}^y \\ p_{ST}^z & 0 & -p_{ST}^x \\ -p_{ST}^y & p_{ST}^x & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 & -\sin(\theta_1 + \theta_3) p_{ST}^z & -\cos(\theta_1 + \theta_3) p_{ST}^y & 0 \\ -\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 & \cos(\theta_1 + \theta_3) p_{ST}^z & -\sin(\theta_1 + \theta_3) p_{ST}^y & -p_{ST}^x \sin(\theta_1 + \theta_3) - p_{ST}^x \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ 0 & 0 & 1 & -p_{ST}^y & p_{ST}^x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 3



Si scrivano le equazioni che determinano i vincoli cinematici di grasp nel caso di contatti soft-finger. Per semplicità si consideri l'oggetto <0> fisso rispetto al sistema di riferimento inerziale <P>, cioè:

$$R_{p0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad p_{p0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Inoltre le basi dei due manipolatori <S1>, <S2> sono posizionate rispetto a <P> secondo le seguenti rototraslazioni:

$$R_{S1P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad p_{S1P} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$R_{S2P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad p_{S2P} = \begin{bmatrix} 0 \\ -b \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si esprimano i vincoli cinematici come visto a lezione, e cioè con la seguente struttura:

$$J_R(q, x_0) \dot{q} = G^T V_{P_0}^b$$

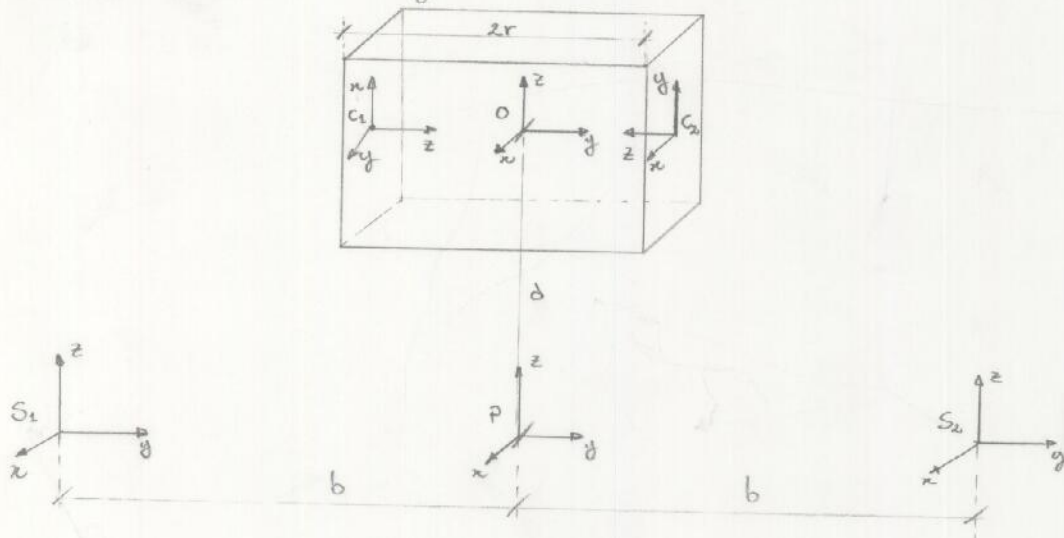
dove $V_{P_0}^b$ è la velocità "body" dell'oggetto rispetto al sistema di riferimento $\langle P \rangle$, inerziale, x_0 è la posizione dell'oggetto rispetto a $\langle P \rangle$ (cioè R_{P_0}, P_{P_0}) e q corrisponde a $q = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_8]^T$. NOTA: Si assuma $l_f = 0$ (lunghezza dito)

Ricordiamo l'espressione della matrice $J_R(q, x_0)$:

$$J_R(q, x_0) = \begin{bmatrix} B_{C_1}^T \text{Ad}_{S_1 C_1}^{-1} J_{S_1 T_1}^S(q_{P_1}) & 0 \\ 0 & B_{C_2}^T \text{Ad}_{S_2 C_2}^{-1} J_{S_2 T_2}^S(q_{P_2}) \end{bmatrix}$$

dove abbiamo indicato con $q_{P_1} = [\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4]^T$, $q_{P_2} = [\theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7]^T$.

Come primo passo vediamo di calcolare $\text{Ad}_{S_i C_i}^{-1}$ che per le ipotesi fatte è una matrice costante (in generale è una funzione di x_0).



$$R_{S_1 C_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P_{S_1 C_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ b-r \\ \delta \end{bmatrix}, \quad S(P_{S_1 C_1}) = \begin{bmatrix} 0 & -\delta & b-r \\ \delta & 0 & 0 \\ r-b & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_{S_2 C_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad P_{S_2 C_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ r-b \\ \delta \end{bmatrix}, \quad S(P_{S_2 C_2}) = \begin{bmatrix} 0 & -\delta & r-b \\ \delta & 0 & 0 \\ b-r & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Ad_{S_1 C_1}^{-1} = \begin{bmatrix} R_{S_1 C_1}^T & -R_{S_1 C_1}^T S(p_{S_1 C_1}) \\ 0 & R_{S_1 C_1}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & b-r & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \delta & r-b \\ 0 & 1 & 0 & -\delta & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Ad_{S_2 C_2}^{-1} = \begin{bmatrix} R_{S_2 C_2}^T & -R_{S_2 C_2}^T S(p_{S_2 C_2}) \\ 0 & R_{S_2 C_2}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \delta & b-r \\ 0 & 0 & 1 & r-b & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \delta & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

D'altra parte abbiamo già visto che:

$$B_{C_1} = B_{C_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ed inoltre:

$$J_{S_1 T_1}^S(q_{P_1}) = \begin{bmatrix} 0 & l_1 \cos \theta_1 & l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_1 + \theta_2 & 0 \\ 0 & l_1 \sin \theta_1 & l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_1 + \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{S_2 T_2}^S(q_{P_2}) = \begin{bmatrix} 0 & l_3 \cos \theta_5 & l_3 \cos \theta_5 + l_4 \cos \theta_5 + \theta_6 & 0 \\ 0 & l_3 \sin \theta_5 & l_3 \sin \theta_5 + l_4 \cos \theta_5 + \theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Per cui:

$$B_{C_1}^T Ad_{S_1 C_1}^{-1} - J_{S_1 T_1}^S(q_{P_1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & b-r & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \delta & r-b \\ 0 & 1 & 0 & -\delta & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} J_{S_1 T_1}^S(q_{P_1})$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & b-r & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \delta & r-b \\ 0 & 1 & 0 & -\delta & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & l_1 \cos \theta_1 & l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_1 + \theta_2 & 0 \\ 0 & l_1 \sin \theta_1 & l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_1 + \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ r-b & l_1 c_{\theta_1} + r-b & l_1 c_{\theta_1} + l_2 c_{\theta_1} + \theta_2 + r-b & 0 \\ 0 & l_1 s_{\theta_1} & l_1 s_{\theta_1} + l_2 s_{\theta_1} + \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B_{C_2}^T A_{S_2 C_2}^{-1} J_{S_2 T_2}^S(q_{\theta_2})$$

$$B_{C_2}^T A_{S_2 C_2}^{-1} J_{S_2 T_2}^S(q_{\theta_2}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta & b-r \\ 0 & 0 & 1 & r-b & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} J_{S_2 T_2}^S(q_{\theta_2})$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta & b-r \\ 0 & 0 & 1 & r-b & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & l_3 c_{\theta_5} & l_3 c_{\theta_5} + l_4 c_{\theta_5} + \theta_6 & 0 \\ 0 & l_3 s_{\theta_5} & l_3 s_{\theta_5} + l_4 s_{\theta_5} + \theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b-r & l_3 c_{\theta_5} + b-r & l_3 c_{\theta_5} + l_4 c_{\theta_5} + \theta_6 + b-r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -l_3 s_{\theta_5} & -l_3 s_{\theta_5} - l_4 s_{\theta_5} + \theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ed in conclusione abbiamo:

$$\begin{array}{c} J_h(q, \dot{q}_0) \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r-b & l_1 c_{\theta_1} + r-b & l_1 c_{\theta_1} + l_2 c_{\theta_1} + \theta_2 + r-b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_1 s_{\theta_1} & l_1 s_{\theta_1} + l_2 s_{\theta_1} + \theta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-r & l_3 c_{\theta_5} + b-r & l_3 c_{\theta_5} + l_4 c_{\theta_5} + \theta_6 + b-r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -l_3 s_{\theta_5} & -l_3 s_{\theta_5} - l_4 s_{\theta_5} + \theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \\ \dot{q}_7 \\ \dot{q}_8 \end{bmatrix} = \\ \\ G^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -r & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 1 & r & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \Delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{p0}^B \\ W_{p0}^B \end{bmatrix} \end{array}$$

Esercizio 4

Si consideri il grasp descritto nell'esercizio precedente. Si valuti se il grasp è manipolabile, cioè se per ogni scelta di V_{PO}^B esiste una $\dot{p}$ che realizza quella particolare V_{PO}^B .

In sostanza dobbiamo verificare se il range della matrice G^T è contenuto nel range della matrice $J_R(q, x_0)$. Poiché $J_R(q, x_0)$ ha due righe nulle (la quarta e l'ottava), possiamo concludere che il range di $J_R(q, x_0)$ non conterrà sicuramente vettori nel seguente spazio:

$$\mathcal{N} = \left\{ v \in \mathbb{R}^8 : v_4 \neq 0 \text{ oppure } v_8 \neq 0 \right\}$$

cioè:

$$\text{if } x \in \mathcal{N} \Rightarrow x \notin \mathcal{R}(J_R(q, x_0))$$

A questo punto se troviamo $x \in \mathcal{N}$ t.c. $x \in \mathcal{R}(G^T)$ possiamo concludere che il grasp non è manipolabile. Prendendo ad esempio, con $\omega_{PO}^{B,y} \neq 0$

$$V_{PO}^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega_{PO}^{B,y} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow G^T \cdot V_{PO}^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega_{PO}^{B,y} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\omega_{PO}^{B,y} \end{bmatrix} = x \in \mathcal{N}$$

cioè il grasp non è manipolabile in quanto non riesce a generare velocità di rotazione lungo l'asse y.