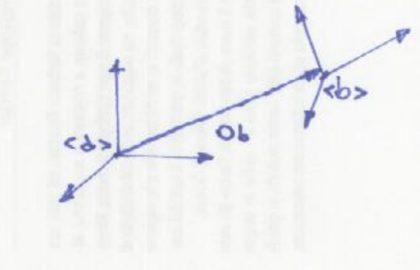
Nuova Rappresentazione delle Velocità: Body Velocities 27/05/2010

Fino ad ora abbiamo rappresentato la velocità di un corpo rigido rispetto ad un'altro utilizzando due quantità:

- v_{ab} : velocità dell'origine di <b> rispetto al sistema di riferimento a espressa nel sistema di riferimento <a>;



- ω_{ab} : descrizione della derivata della matrice di rotazione R_{ab} da <b> ad <a>;

In formule in particolare abbiamo che:

$$v_{ab} = \frac{d}{dt}\left(O_b^a\right) \quad , \quad \omega_{ab} : \quad \dot{R}_{ab} = S(\omega_{ab}) R_{ab}$$

Queste quantità compaiono nella formula che consente di scrivere la velocità con cui si muove un punto p nel sistema di riferimento <a> a partire dalla velocità con cui si muove nel sistema di riferimento <b>. Indicando infatti con $\dot{p}^a$ la velocità di p in <a> e con $\dot{p}^b$ la velocità in <b>, abbiamo

$$\dot{p}^a = \omega_{ab} \times R_{ab} p^b + v_{ab} + R_{ab}\dot{p}^b$$

essendo p^b le coordinate di p in <b>. Se volessimo esprimere la velocità con cui il punto p si muove in <a> non nelle coordinate di <a> ma in quelle di <b> allora:

$$\begin{aligned}
(\dot{p}^a)^b &= R_{ab}^T \omega_{ab} \times R_{ab} p^b + R_{ab}^T v_{ab} + \dot{p}^b \\
&= R_{ab}^T S(\omega_{ab}) R_{ab} p^b + R_{ab}^T v_{ab} + \dot{p}^b \\
&= S(R_{ab}^T \omega_{ab}) p^b + R_{ab}^T v_{ab} + \dot{p}^b
\end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato la relazione $R\, S(\omega) R^T = S(R\omega)$.

Definendo ora $v_{ab}^B = R_{ab}^T v_{ab}$ e $R_{ab}^T \omega_{ab} = \omega_{ab}^B$, cosiddette body velocities, è facile concludere che:

$$(\dot p^a)^b = \omega_{ab}^B \times p^b + v_{ab}^B + \dot p^b \qquad (*)$$

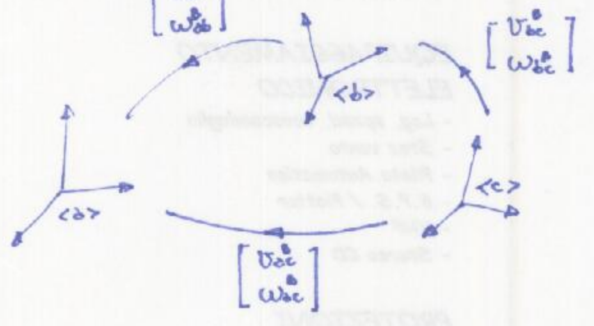
in cui risulta chiaro che v_{ab}^B e ω_{ab}^B risultano essere più convenienti qualora si dovesse scrivere la velocità del punto p rispetto ad <a> nelle coordinate di <b>

Note: Abbiamo visto che $S(\omega_{ab}) = \dot R_{ab} R_{ab}^T$. Ne consegue che:

$$S(\omega_{ab}^B) = S(R_{ab}^T \omega_{ab}) = R_{ab}^T S(\omega_{ab}) R_{ab} = R_{ab}^T \dot R_{ab} \cancel{R_{ab}^T} \cancel{R_{ab}} = R_{ab}^T \dot R_{ab}$$

$$S(\omega_{ab}^B) = R_{ab}^T \dot R_{ab}$$

Body Velocities e Moti Relativi



Cerchiamo ora di esprimere una relazione che vincoli le tre velocità relative, quella di <b> rispetto a <c> $(v_{bc}^B, \omega_{bc}^B)$, quella di <a> rispetto a <b> $(v_{ab}^B, \omega_{ab}^B)$ e quella di <a> rispetto a <c> $(v_{ac}^B, \omega_{ac}^B)$.

Utilizzando (*) tra <b> e <c>

$$(\dot p^b)^c = \omega_{bc}^B \times p^c + v_{bc}^B + \dot p^c$$

e se supponiamo che p sia fermo rispetto a <c>:

$$(\dot p^b)^c = \omega_{bc}^B \times p^c + v_{bc}^B$$

Allo stesso modo (*) applicata tra <a> e <b>:

$$(\dot p^a)^b = \omega_{ab}^B \times p^b + v_{ab}^B + \dot p^b$$

ed esprimendo tutte le quantità in <c> abbiamo:

$$(\dot p^a)^c = R_{bc}^T (\dot p^a)^b = R_{bc}^T \omega_{ab}^B \times p^b + R_{bc}^T v_{ab}^B + R_{bc}^T \dot p b$$

dove riconosciamo: $R_{bc}^T \dot p^b = R_{bc}^T (\dot p^b)^b = (\dot p^b)^c = \omega_{bc}^B \times p^c + v_{bc}^B + \dot p_c$

Pertanto abbiamo ottenuto:

$$(\dot{p}^a)^c = R_{bc}^T \omega_{ab}^B \times p^b + R_{bc}^T v_{ab}^B + \omega_{bc}^B \times p^c + v_{bc}^B + \dot{p}_c$$

in cui sostituiamo:

$$p^b = R_{bc} p^c + o_c^b$$

per ottenere:

$$\begin{aligned}(\dot{p}^a)^c &= R_{bc}^T \omega_{ab}^B \times (R_{bc} p^c + o_c^b) + R_{bc}^T v_{ab}^B + \omega_{bc}^B \times p^c + v_{bc}^B + \dot{p}_c \\ &= R_{bc}^T S(\omega_{ab}^B) R_{bc} p^c + R_{bc}^T \omega_{ab} \times o_c^b + R_{bc}^T v_{ab}^B + \omega_{bc}^B \times p^c + v_{bc}^B + \dot{p}_c \\ &= S(R_{bc}^T \omega_{ab}^B) p^c - R_{bc}^T o_c^b \times \omega_{ab}^B + R_{bc}^T v_{ab}^B + \omega_{bc}^B \times p^c + v_{bc}^B + \dot{p}_c\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato $R S(\omega) R^T = S(R\omega)$ e $a \times b = -b \times a$. Confrontando infine quest'ultima espressione con $(*)$ applicata tra <a> e <c>:

$$(\dot{p}^a)^c = \omega_{ac}^B \times p^c + v_{ac}^B + \dot{p}_c$$

abbiamo:

$$\begin{bmatrix} v_{ac}^B \\ \omega_{ac}^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{bc}^T & -R_{bc}^T S(o_c^b) \\ 0 & R_{bc}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{ab}^B \\ \omega_{ab}^B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{bc}^B \\ \omega_{bc}^B \end{bmatrix}$$

che esprime il moto relativo di <a> rispetto a <c> in funzione del moto relativo di <a> rispetto a <b> e di <b> rispetto a <c>. Definendo poi:

$$\begin{bmatrix} v_{ac}^B \\ \omega_{ac}^B \end{bmatrix} = V_{ac}^B, \quad \begin{bmatrix} v_{ab}^B \\ \omega_{ab}^B \end{bmatrix} = V_{ab}^B, \quad \begin{bmatrix} v_{bc}^B \\ \omega_{bc}^B \end{bmatrix} = V_{bc}^B,$$

ed osservando che:

$$p^b = R_{bc} p^c + o_c^b \quad \Rightarrow \quad p^c = \underbrace{R_{bc}^T}_{R_{cb}} p^b - \underbrace{R_{bc}^T o_c^b}_{o_b^c}$$

abbiamo:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} R_{bc}^T & -R_{bc}^T S(o_c^b) \\ 0 & R_{bc}^T \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_{cb} & -R_{cb}^{\cancel{T}} S(-R_{cb}^T o_c^b) \\ 0 & R_{cb} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R_{cb} & S(o_c^b) R_{cb}^{\cancel{T}} \\ 0 & R_{cb} \end{bmatrix} \triangleq Ad_{T_{cb}}\end{aligned}$$

cioè la matrice di trasformazione dipende solamente dai parametri che descrivono il moto rigido T_{cb} da <b> a <c>, R_{cb} e o_c^b. Inoltre:

$$\left(Ad_{T_{cb}}\right)^{-1} = Ad_{T_{cb}^{-1}} = A_{T_{bc}}$$

In sostanza la trasformazione per i moti relativi è la seguente:

$$V_{ac}^{B} = \left(Ad_{T_{bc}}\right)^{-1} \cdot V_{ab}^{B} + V_{bc}^{B}$$

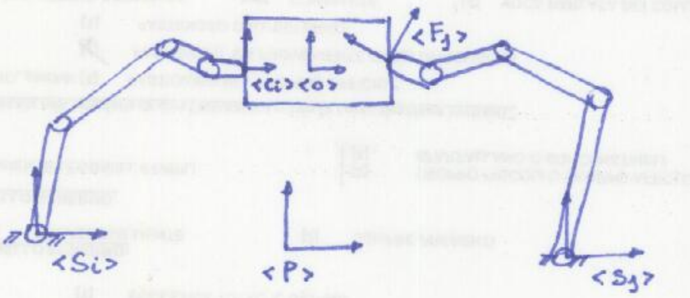
È possibile inoltre dimostrare che:

$$V_{ab}^{B} = -Ad_{T_{ba}} \, V_{ba}^{B}$$

$$Ad_{T_{ab} \cdot T_{bc}} = Ad_{T_{ab}} \cdot Ad_{T_{bc}}$$

VINCOLI CINEMATICI DI GRASP 27/05/2010

Cercheremo ora di scrivere una relazione che leghi le velocità delle dita alla velocità propria dell'oggetto, ossia una relazione che descriva i vincoli cinematici del sistema oggetto + mano.



$<P>$: sistema di riferimento solidale al palmo della mano

$<S_i>$: sistema di riferimento solidale alla base dell'i-esimo dito

$<F_i>$: sistema di riferimento solidale all'i-esimo dito (solidale alla punta del dito)

$<C_i>$: sistema di riferimento solidale all'i-esimo contatto (solidale all'oggetto)

$<O>$: sistema di riferimento nel centro di massa dell'oggetto.

La solita relazione che esprime la cinematica del robot ci consente di esprimere la velocità di $<F_i>$ rispetto a $<S_i>$ riferita in $<S_i>$:

$$V_{s_i f_i} = \begin{bmatrix} v_{s_i f_i} \\ \omega_{s_i f_i} \end{bmatrix} = J(q_{f_i})\, \dot{q}_{f_i}$$

$J(q_{f_i})$: jacobiano geometrico del link-finger i-esimo

q_{f_i} : coordinate generalizzate che descrivono la posa del dito i-esimo

$(v_{s_i f_i}, \omega_{s_i f_i})$: velocità relativa di $<F_i>$ rispetto a $<S_i>$.

Volendo esprimere quest'espressione in body velocities, dal momento che $v^B_{ab} = R^T_{ab}\, v_{ab}$, $\omega^B_{ab} = R^T_{ab}\, \omega_{ab}$:

$$V^B_{s_i f_i} = \begin{bmatrix} R^T_{s_i f_i} & 0 \\ 0 & R^T_{s_i f_i} \end{bmatrix} V_{s_i f_i} = \begin{bmatrix} R^T_{s_i f_i} & 0 \\ 0 & R^T_{s_i f_i} \end{bmatrix} J(q_{f_i})\, \dot{q}_{f_i}$$

che riscriviamo:

$$V^B_{s_i f_i} = Ad^{-1}_{T_{s_i f_i}} \cdot \underbrace{Ad_{T_{s_i f_i}} \begin{bmatrix} R_{s_i f_i} & 0 \\ 0 & R^T_{s_i f_i} \end{bmatrix} J(q_{f_i})\, \dot{q}_{f_i}}_{\triangleq\, J^S_{s_i f_i}(q_{f_i})}$$

Per cui in definitiva abbiamo ottenuto:

$$V^B_{s_i f_i} = Ad^{-1}_{T_{s_i f_i}} \cdot J^s_{s_i f_i}(q_{f_i})\, \dot{q}_{f_i}$$

I vincoli di grasp per ciascun dito definiscono le direzioni in cui il moto del dito non è consentito. Questi vincoli si esprimono in maniera naturale come vincoli sulla velocità di $\langle F_i \rangle$ relativamente a $\langle C_i \rangle$. Per esempio, nel caso di contatto senza attrito, la velocità di $\langle F_i \rangle$ rispetto a $\langle C_i \rangle$ deve essere nulla lungo la normale alla superficie; per convenzione tale direzione è l'asse z di $\langle C_i \rangle$ e pertanto:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} V^B_{f_i c_i} = 0$$

In generale le direzioni lungo cui è impedito il movimento coincidono con le direzioni lungo cui sono esercitabili forze/coppie. Pertanto per un contatto la cui base delle forze/coppie è B_{c_i} abbiamo:

$$B^T_{c_i} V^B_{f_i c_i} = 0$$

Esprimiamo ora $V^B_{f_i c_i}$ (d'ora in poi rimuoviamo l'apice "B" in quanto ci riferiremo solo a body velocities) passando per $\langle P \rangle$, sistema di riferimento del palmo:

$$V_{f_i c_i} = Ad^{-1}_{p c_i} V_{f_i p} + V_{p c_i}$$

Ricordando, $V_{f_i p} = -Ad_{p f_i} \cdot V_{p f_i}$ otteniamo quindi:

$$(1) \qquad V_{f_i c_i} = -Ad^{-1}_{p c_i} Ad_{p f_i} V_{p f_i} + V_{p c_i}$$

Cerchiamo ora di rappresentare la velocità di $\langle F_i \rangle$ non rispetto al palmo $\langle P \rangle$ ma rispetto alla base del dito $\langle S_i \rangle$:

$$(2) \qquad V_{p f_i} = \cancel{Ad^{-1}_{s_i f_i} V_{p s_i}} + V_{s_i f_i} = V_{s_i f_i}$$

in cui abbiamo ricordato che $V_{p s_i} = 0$ in quanto la base del palmo è solidale alla base del dito. Cerchiamo poi di rappresentare $V_{p c_i}$ (velocità del contatto rispetto al palmo) in relazione alla velocità V_{po} dell'oggetto rispetto al palmo

$$(3) \qquad V_{p c_i} = Ad^{-1}_{o c_i} V_{po} + \cancel{V_{o c_i}} = Ad^{-1}_{o c_i} V_{po}$$

dove ancora una volta $V_{o c_i} = 0$ in quanto i contatti sono fissi sull'oggetto.

Riassumendo e sostituendo (2) e (3) in (1):

$$V_{f_i c_i} = -Ad^{-1}_{p c_i} Ad_{p f_i} V_{s_i f_i} + Ad^{-1}_{o c_i} V_{po}$$

che sostituita in $B_{c_i}^T V_{f_i c_i} = 0$ porta a:

$$B_{c_i}^T Ad^{-1}_{p c_i} Ad_{p f_i} V_{s_i f_i} = B_{c_i}^T Ad^{-1}_{o c_i} V_{po}$$

a sua volta espandibile come segue (ricordando la cinematica del dito)

(4) $$B_{c_i}^T \left(Ad^{-1}_{p c_i} Ad_{p f_i} Ad^{-1}_{s_i f_i} \right) J^s_{s_i f_i}(q_{f_i}) \dot{q}_{f_i} = B_{c_i}^T Ad^{-1}_{o c_i} V_{po}.$$

La matrice tra parentesi può essere semplificata come segue:

$$Ad^{-1}_{p c_i} \cdot Ad_{p f_i} \cdot Ad^{-1}_{s_i f_i} = Ad_{c_i p} \cdot Ad_{p f_i} \cdot Ad_{f_i s_i}$$

$$= Ad_{c_i s_i}$$

$$= Ad^{-1}_{s_i c_i}$$

e pertanto la (4) diventa:

$$B_{c_i}^T Ad^{-1}_{s_i c_i} J_{s_i f_i}(q_{f_i}) \dot{q}_{f_i} = B_{c_i}^T Ad^{-1}_{o c_i} V_{po}$$

dove osserviamo che $B_{c_i}^T Ad^{-1}_{o c_i} = \left(Ad^{-1\,T}_{o c_i} B_{c_i} \right)^T = G_i^T$

in quanto $$\left(Ad^{-1}_{o c_i}\right)^T = \begin{bmatrix} R_{o c_i}^T & -R_{o c_i}^T S(o^o_{c_i}) \\ 0 & R_{o c_i}^T \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} R_{o c_i} & 0 \\ S(o^o_{c_i}) R_{o c_i} & R_{o c_i} \end{bmatrix}$$

che è proprio la matrice che moltiplica B_{c_i} nella definizione di G_i. In conclusione per il dito i-esimo abbiamo ottenuto la seguente relazione:

$$B_{c_i}^T Ad^{-1}_{s_i c_i} J_{s_i f_i}(q_{f_i}) \dot{q}_{f_i} = G_i^T V_{po}$$

ed includendo ciascun dito:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} B_{c_1}^T Ad^{-1}_{s_1 c_1} J_{s_1 f_1}(q_{f_1}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_{c_n}^T Ad^{-1}_{s_n c_n} J_{s_n f_n}(q_{f_n}) \end{bmatrix}}_{J_h(q,\, x_o)} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q}_{f_1} \\ \vdots \\ \dot{q}_{f_n} \end{bmatrix}}_{\dot{Q}} = \underbrace{\begin{bmatrix} G_1^T \\ \vdots \\ G_k^T \end{bmatrix}}_{G^T} V_{po}$$

che diventa:

$$J_h(Q, x_o)\, \dot{Q} = G^T V_{po}$$

dove $x_o \doteq T_{po}$ è la configurazione dell'oggetto rispetto al palmo.

La relazione ottenuta:

$$J_h(q, x_o)\,\dot{q} = G^T V_{po} \qquad \text{fundamental grasping constraint}$$

mette in relazione le velocità delle dita con la velocità dell'oggetto. Pertanto le quantità J_h, G, FC caratterizzano completamente le proprietà cinematiche di un insieme di dita che afferrano un oggetto.