

Fino ad ora abbiamo caratterizzato un grasp in relazione alla sua matrice di grasp:

$$G \in \mathbb{R}^{p \times m}$$

ed al suo cono di attrito FC. Qualora l'oggetto da afferrare sia raggiungibile con un manipolatore, sia G che FC diventano dei parametri che il compito di chi pianifica il grasp definisce.

Un primo importante parametro è il numero di punti di contatto sull'oggetto, che in definitiva si riflette sul numero di dita che verrà usato nella presa.

Dato un oggetto $O \subset \mathbb{R}^3$ (o nel caso pianaire $O \subset \mathbb{R}^2$), chiameremo Z la superficie dell'oggetto, ossia l'insieme all'interno del quale è possibile scegliere i punti di contatto.

Definiamo inoltre $\Lambda(Z)$ l'insieme delle possibili forze/coppie che possono essere esercitate sull'oggetto con contatti senza attrito:

$$\Lambda(Z) = \left\{ \begin{bmatrix} n_{ci} \\ p_{ci} \times n_{ci} \end{bmatrix} : c_i \in Z \right\},$$

essendo n_{ci} la normale unitaria a Z nel punto c_i (come al solito n_{ci} punta verso l'interno dell'oggetto), ed essendo p_{ci} il punto di contatto espresso nel sistema di riferimento dell'oggetto.

Def: Una superficie Z si dice eccezionale se la convex hull di $\Lambda(Z)$ non contiene l'origine al suo interno.

Nota: Un oggetto con una superficie eccezionale non ammette "force closure" usando solamente punti di contatto senza attrito.

Esempio: La sfera (nello spazio tridimensionale) e il cerchio (nel piano) sono esempi di superfici eccezionali.

Per oggetti con superficie non eccezionale è possibile definire dei limiti superiori ed inferiori al numero di contatti senza attrito per ottenere un grasp force-closure.

Teorema (Caratheodory): se un insieme $X = \{v_1, \dots, v_k\}$ copre positivamente $\mathbb{R}^p$ allora, $k \geq p+1$.

Dim: Supponiamo per assurdo che esistano $\{v_1, \dots, v_p\}$ che coprono positivamente $\mathbb{R}^p$. Prendiamo un generico $v \in \mathbb{R}^p$, esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tutti positivi tali che:

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p$$

Poichè però $v_1 \dots v_p$ è una base di $\mathbb{R}^p$ l'unico modo per generare il vettore $-v$ è il seguente:

$$-v = (-\lambda_1) v_1 + \dots + (-\lambda_p) v_p$$

cioè tramite i coefficienti $\hat{\lambda}_1 = -\lambda_1 < 0, \dots, \hat{\lambda}_p = -\lambda_p < 0$ e questo contraddice l'ipotesi che $v_1 \dots v_p$ coprono positivamente $\mathbb{R}^p$.

Teorema (Steinitz): se $S \subset \mathbb{R}^p$ e $q \in \text{int}(\text{co} S)$, allora esiste $X = \{v_1 \dots v_k\} \subset S$ tale che $q \in \text{int}(\text{co} X)$ e $k \leq 2p$.

Quest'ultimo teorema (non dimostrato) fissa il numero massimo di contatti senza attrito per ottenere un grasp forza chiusa. Infatti, scegliendo $S = \Lambda(Z)$ e $q = 0$ si ottiene $X = \{v_1, \dots, v_k\} \subset \Lambda(Z)$ t.c. $0 \in \text{int}(\text{co} X)$ e $k \leq 2p$ che per il teorema di caratterizzazione dei grasp forza chiusi garantisce che X è forza-chiuso.

Il teorema precedente fissa invece a $p+1$ il numero minimo di contatti friction-less (senza attrito) per un grasp forza-chiuso. In sostanza, riassumendo:

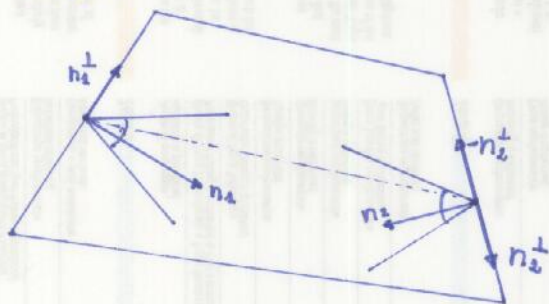
(1) caso planare ($p=2$): $4 \leq k \leq 6$

(2) caso tridimensionale ($p=3$): $7 \leq k \leq 12$

Costruire Force Closure Grasps

In questo paragrafo forniamo degli strumenti per pianificare la posizione di punti di contatto con attrito tali da creare condizioni di force-closure:

Teorema: Un grasp planare con due punti di contatto con attrito è force-closure se e solo se la linea che congiunge i punti di contatto giace interamente all'interno di entrambi i coni di attrito.



Per convertire il teorema appena citato (e non dimostrato) in un algoritmo di pianificazione è necessario riscrivere la condizione "la linea che congiunge i punti di contatto giace all'interno dei coni" sotto forma di disuguaglianze.

A tale scopo, si definisce n_1 la normale (verso l'interno dell'oggetto) nel primo punto di contatto p_1 . Sia poi $n_1^\perp$ la normale a n_1 che soddisfa la seguente condizione:

$$n_1 \otimes n_1^\perp = +1$$

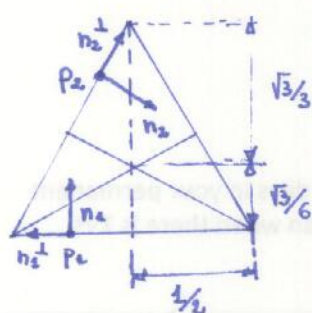
essendo $\otimes$ il prodotto vettoriale nel caso 2D (in pratica la sola componente diversa da zero nel solito prodotto vettoriale, la componente z) tale che:

$$a \otimes b = \det \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^2.$$

Con queste ipotesi, la condizione di force-closure diventa:

$$\begin{cases} (n_1 - \mu n_1^\perp) \otimes (p_2 - p_1) > 0 \\ (n_1 + \mu n_1^\perp) \otimes (p_2 - p_1) < 0 \\ (n_2 - \mu n_2^\perp) \otimes (p_1 - p_2) > 0 \\ (n_2 + \mu n_2^\perp) \otimes (p_1 - p_2) < 0 \end{cases}$$

Esempio



$$n_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad n_1^\perp = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

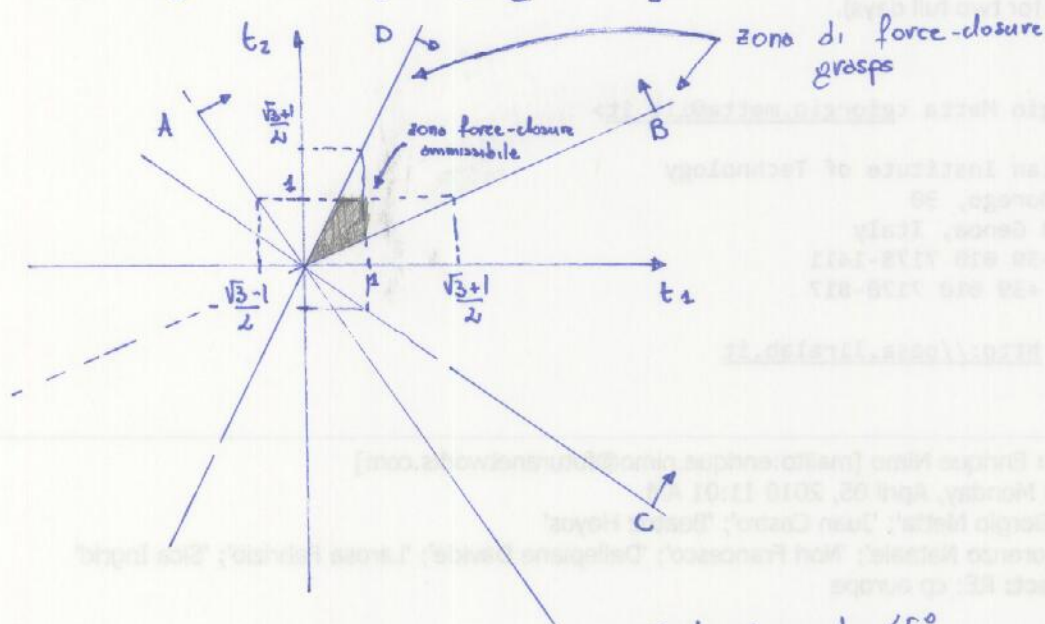
$$n_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}, \quad n_2^\perp = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

$$p_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + t_1 \\ -\sqrt{3}/6 \end{bmatrix}, \quad t_1 \in [0, 1]$$

$$p_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{t_2}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} t_2 \end{bmatrix}, \quad t_2 \in [0, 1]$$

cioè stiamo considerando contatti solo su due dei tre lati.

$$p_2 - p_1 = \begin{bmatrix} \frac{t_2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - t_1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{t_2}{2} - t_1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} t_2 \end{bmatrix}$$



$$A: (n_1 - \mu n_1) \otimes (p_2 - p_1) > 0$$

$$(n_1 - \mu n_1) \otimes (p_2 - p_1) = \det \begin{bmatrix} n_1 - \mu n_1 & p_2 - p_1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & \frac{t_2}{2} - t_1 \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} t_2 \end{bmatrix} > 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} t_2 - \frac{t_2}{2} + t_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} t_2 + t_1 > 0$$

$$B: -(n_2 + \mu n_2) \otimes (p_2 - p_1) > 0, \quad -\det \begin{bmatrix} -1 & \frac{t_2}{2} - t_1 \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} t_2 \end{bmatrix} > 0$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} t_2 - \frac{t_2}{2} + t_1 < 0 \quad -\frac{\sqrt{3}+1}{2} t_2 + t_1 < 0$$

$$C: (n_2 + \mu n_2^\perp) \otimes (p_1 - p_2) < 0 \quad \det \begin{bmatrix} n_2 + \mu n_2^\perp & p_1 - p_2 \end{bmatrix} < 0$$

$$n_2 + \mu n_2^\perp = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{bmatrix}, \quad \det \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{2} & t_1 - \frac{t_2}{2} \\ \frac{\sqrt{3}-1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} t_2 \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{aligned} -\frac{\sqrt{3}+1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} t_2 - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) \left(t_1 - \frac{t_2}{2}\right) &= -\left(\frac{3}{4} t_2 + \frac{\sqrt{3}}{4} t_2\right) - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) t_1 + \frac{\sqrt{3}}{4} t_2 - \frac{1}{4} t_2 \\ &= -t_2 - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) t_1 < 0 \end{aligned}$$

$$D: (n_2 - \mu n_2^\perp) \otimes (p_1 - p_2) > 0 \quad \det \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}-1}{2} & t_1 - \frac{t_2}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}+1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} t_2 \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) \frac{\sqrt{3}}{2} t_2 + \frac{\sqrt{3}+1}{2} \left(t_1 - \frac{t_2}{2}\right) &= -\frac{3}{4} t_2 + \frac{\sqrt{3}}{4} t_2 + \frac{\sqrt{3}+1}{2} t_1 - \frac{\sqrt{3}}{4} t_2 - \frac{1}{4} t_2 \\ &= -t_2 + \frac{\sqrt{3}+1}{2} t_1 > 0 \end{aligned}$$

Ricordando che $t_1, t_2 \in [0, 1]$ si ottiene quindi la regione dei force closure grasp ammissibili. Ciascun punto all'interno di questa regione rappresenta un possibile posizionamento dei contatti con attuto (sui due lati del triangolo) che garantisce le condizioni di force closure.

Esiste un'estensione del teorema al caso tridimensionale. Ancora una volta enunciamo il teorema senza dimostrarlo.

Teorema: Un grasp tridimensionale con due contatti di tipo soft-finger è force-closure se e solo se la linea congiungente i due punti di contatto giace interamente all'interno dei due coni di attuto.