

Consideriamo il solo caso di punti di contatto senza attrito, per cui abbiamo visto che:

$$G = \begin{bmatrix} n_{c1} & & n_{ck} \\ p_{c1 \times n_{c1}} & \dots & p_{ck \times n_{ck}} \end{bmatrix}$$

$$FC = \{f \in \mathbb{R}^k : f_i \geq 0\}$$

dove n_{ci} è la normale al punto di contatto e dove p_{ci} è il punto di contatto, entrambi rappresentati nel sistema di riferimento solido all'oggetto.

In questo contesto, (G, FC) è force closure:

- (1) se e solo se $G(FC) = \mathbb{R}^6$;
- (2) se e solo se combinazioni positive delle colonne di G coprono $\mathbb{R}^6$.

Def: Un insieme di vettori $\{v_1 \dots v_k\}$ in $\mathbb{R}^n$ copre positivamente (positively spans) $\mathbb{R}^n$ se per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ esistono combinatori $d_1 \dots d_k$ positivi tali che:

$$\sum_{i=1}^k d_i v_i = x$$

Def: Un insieme di vettori $\{v_1, \dots, v_k\}$ in $\mathbb{R}^n$ è detto essere positivamente dipendente se esistono combinatori $d_1 \dots d_k$ positivi tali che:

$$\sum_{i=1}^k d_i v_i = 0$$

Fatto: Se $\{v_1 \dots v_k\}$ coprono positivamente $\mathbb{R}^n \Rightarrow \{v_1 \dots v_k\}$ sono positivamente dipendenti.

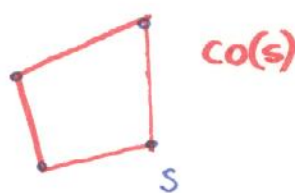
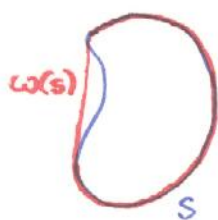
Dim: Si prenda $x=0$ nella definizione di positively span.

Def: Un insieme K è detto essere convesso se $\forall x, y \in K$

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in K \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

cioè ogni linea congiungente due punti in K giace tutta nell'insieme K .

Def: L'involuppo convesso (convex hull) di un insieme S , che indicheremo $\text{co}(S)$, è il più piccolo insieme convesso K contenente S .

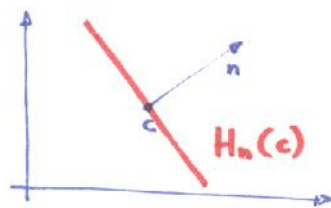


Fatto: Dato un insieme di punti $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ abbiamo che:

$$\text{co}(S) = \left\{ v : v = \sum_{i=1}^k d_i v_i, \sum_{i=1}^k d_i = 1, d_i \geq 0 \right\}$$

Def: Dato un punto $c \in \mathbb{R}^p$ ed una direzione $n \in \mathbb{R}^p$ chiameremo iperpiano per c di normale n (i.e. perpendicolare ad n) il seguente insieme:

$$H_n(c) = \left\{ x \in \mathbb{R}^p : v^T(x-c) = 0 \right\}$$



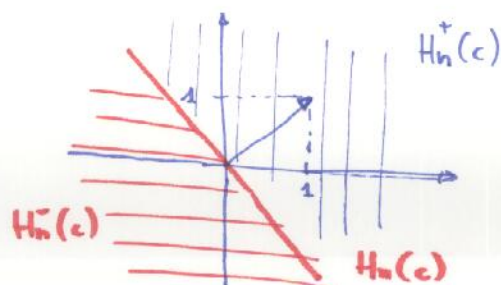
Si noti che un iperpiano per c perpendicolare ad n determina una suddivisione dello spazio tramite due insiemi:

$$H_n^+(c) = \left\{ x \in \mathbb{R}^p : v^T(x-c) > 0 \right\} \quad H_n^-(c) = \left\{ x \in \mathbb{R}^p : v^T(x-c) < 0 \right\}$$

Es:

$$c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$n = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Fatto: Dato un insieme convesso K ed un punto $c \notin K$, esiste sempre un iperpiano per c , $H_v(c)$ tale che:

$$\forall x \in K \quad v^T(x-c) > 0$$

cioè:

$$K \subset H_v^+(c);$$

in altri termini K giace interamente su un lato di $H_v(c)$.

Tale iperpiano è detto, iperpiano di separazione. Se inoltre

$c \in \partial K$, allora esiste $H_v(c)$ tale che:

$$\forall x \in K \quad v^T(x-c) \geq 0$$

ed in questo caso $H_v(c)$ è detto iperpiano di supporto.

Fatto: Si consideri un grasp che contenga solo punti di contatto senza attrito, e sia descritto da (G, FC) con $G \in \mathbb{R}^{p \times m}$ matrice di grasp.

Indichiamo con $\{G_1, \dots, G_m\}$ le colonne di G ; allora, le seguenti condizioni sono equivalenti:

- (1) (G, FC) è force closure;
- (2) le colonne di G coprono positivamente $\mathbb{R}^p$;
- (3) la convex hull di $\{G_1 \dots G_m\}$ contiene un intorno dell'origine;
- (4) non esiste un vettore $v \in \mathbb{R}^p$, $v \neq 0$, tale che:

$$v^T G_i \geq 0 \quad \forall i$$

La condizione (4) può essere testata in modo operativo, in quanto formalmente equivalente alla seguente procedura (che non dimostriamo):

- (a) si scelgono $p-1$ colonne indipendenti di G e si indichi con v il generico vettore perpendicolare alle $p-1$ colonne;
- (b) si verifichi se i prodotti interni di v con le rimanenti colonne di G hanno tutti lo stesso segno.

Verifichiamo ora la condizione (4) tramite i passi (a) e (b).

(a1) In questo caso (planare) $p=3$ per cui prendiamo $p-1=2$ colonne indipendenti: $G_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -a \end{bmatrix}$, $G_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ b \end{bmatrix}$.

Il vettore generico ortogonale a G_1 e G_2 è $v = [a \ b \ 1]^T$.

(b1) Verifichiamo che $v^T G_3$ e $v^T G_4$ non abbiano tutti lo stesso segno:

$$v^T G_3 = [a \ b \ 1] \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -a \end{bmatrix} = -2a$$

$$v^T G_4 = [a \ b \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{bmatrix} = 2b$$

— 0 —

(a2) Prendiamo le seguenti colonne indipendenti:

$$G_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -a \end{bmatrix}, \quad G_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -a \end{bmatrix} \Rightarrow v = [0 \ 1 \ 0]^T$$

(b2) $v^T G_2 = [0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ b \end{bmatrix} = -1$ $v^T G_4 = [0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{bmatrix} = 1$

— 0 —

(a3) $G_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -a \end{bmatrix}, \quad G_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow v = [a \ -b \ 1]^T$

(b3) $v^T G_2 = [a \ -b \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ b \end{bmatrix} = 2b$, $v^T G_3 = [a \ -b \ 1] \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -a \end{bmatrix} = -2a$

— 0 —

(a4) $G_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ b \end{bmatrix}, \quad G_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -a \end{bmatrix} \Rightarrow v = [-a \ b \ 1]^T$

(b4) $v^T G_1 = [-a \ b \ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -a \end{bmatrix} = -2a$ $v^T G_4 = [-a \ b \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{bmatrix} = 2b$

— 0 —

(a5) $G_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ b \end{bmatrix}, \quad G_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow v = [1 \ 0 \ 0]^T$

(b5) $v^T G_1 = 1$, $v^T G_3 = -1$

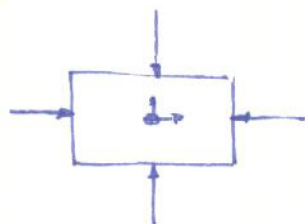
$$(a6) \quad G_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -a \end{bmatrix}, \quad G_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow v = \begin{bmatrix} -a & -b & 1 \end{bmatrix}$$

$$(b6) \quad v^T G_1 = \begin{bmatrix} -a & -b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -a \end{bmatrix} = -2a, \quad v^T G_2 = \begin{bmatrix} -a & -b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ b \end{bmatrix} = 2b$$

Chiaramente se a e b hanno il medesimo segno, è facile vedere che nessuno dei prodotti delle condizioni (b) hanno lo stesso segno, da cui possiamo concludere che G è forza durezza rispetto a:

$$FC = \left\{ f \in \mathbb{R}^4 : f_i \geq 0 \right\}$$

Tuttavia, se $a = b = 0$:

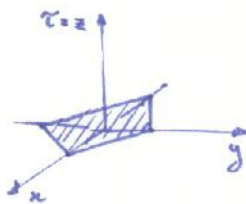
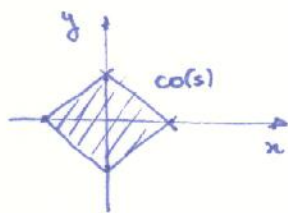


$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

allora (G, FC) non è più forza durezza in quanto non c'è modo di resistere alle coppie di rotazione. Come ulteriori verifiche si noti che:

(2) le colonne di G non coprono $\mathbb{R}^3$ in quanto le combinazioni lineari delle colonne di G generano solo vettori la cui terza componente è nulla

(3) la convex hull di $\{G_1 \dots G_4\}$ non contiene un intorno dell'origine:



in quanto già interamente nel piano $x-y$.

(4) esiste $v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \neq 0$ t.c. $v^T G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0$

È possibile estendere le proprietà equivalenti appena discusse al caso di contatti con attrito? In alcuni casi la risposta è sì, e la procedura consiste nel scrivere una descrizione del grasp basata sulla combinazione lineare di vettori noti con combinazioni positive.

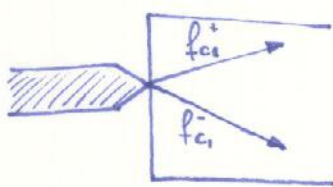
Esempio: contatto con attrito (caso planare)



Abbiamo visto che nel caso 3D un contatto con attrito è descritto come segue:

$$G_i f_{ci} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} f_{ci} \quad f_{ci} \in FC_i = \left\{ f \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \leq \mu f_3, f_3 \geq 0 \right\}$$

Nel caso planare, la rappresentazione del medesimo contatto può diventare:



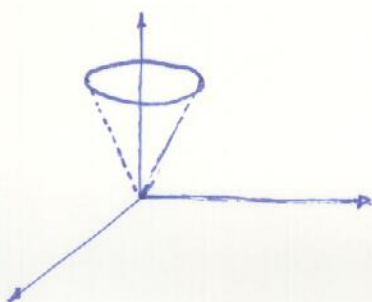
$$G_i' f_{ci}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \mu & -\mu \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} f_{ci}' \quad f_{ci}' \in FC_i' = \left\{ f \in \mathbb{R}^2 : f_1, f_2 \geq 0 \right\}$$

ed introducendo la trasformazione che esprime le forze agenti sull'oggetto abbiamo:

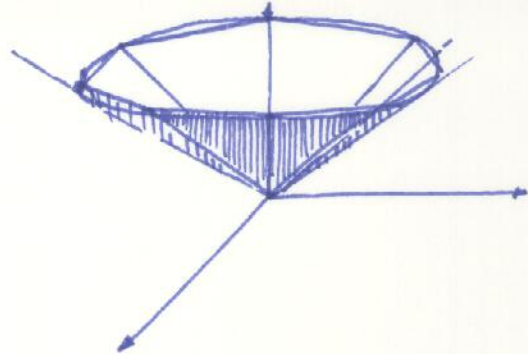
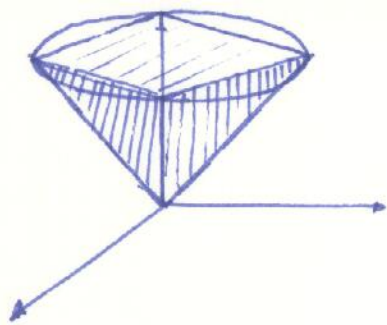
$$G_i = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \mu & -\mu \\ \mu r & -\mu r \end{bmatrix}, \quad FC_i' = \left\{ f \in \mathbb{R}^2, f_1, f_2 \geq 0 \right\}$$

cioè in questo caso siamo riusciti ad esprimere le forze di grasp come combinazione positiva di vettori.

Esempio: contatto con attrito (caso 3D)



Nel caso 3D non è ovvio approssimare il cono di attrito come combinazione positiva di vettori. È tuttavia possibile creare delle approssimazioni poligonali del cono.



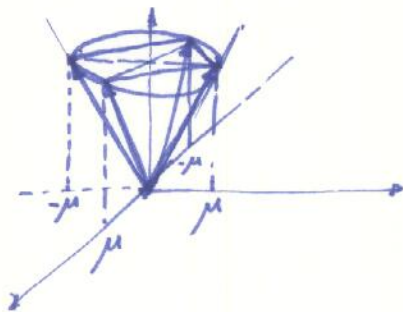
Esempio: Il contatto 3D con attuto è descritto da:

$$F_{ci} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} f_{ci}, \quad f_{ci} \in FC_i = \left\{ f \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \leq \mu f_3, f_3 \geq 0 \right\}$$

Una possibile approssimazione connessa è la seguente:

$$\tilde{F}_{ci}' = \begin{bmatrix} \mu & -\mu & 0 & -\mu \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} f_{ci}', \quad f_{ci}' \in FC_i' = \left\{ f \in \mathbb{R}^4 : f_i \geq 0 \right\}$$

che corrisponde alla seguente approssimazione:



Nota: Sappiamo che se $S = \{v_1 \dots v_n\}$ allora:

$$\text{co}(S) = \left\{ \sum d_i v_i, d_i \geq 0, \sum d_i = 1 \right\}$$

Se in particolare $v_1 = 0$ allora:

$$\text{co}(S) = \left\{ \sum_{i=2}^n d_i v_i, d_2 \geq 0, \dots, d_n \geq 0 \right\}$$