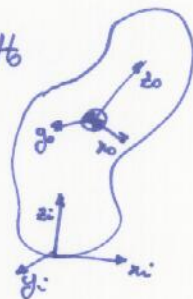


Cominceremo la descrizione statica dell'afferraggio trascurando la cinematica della mano ed ipotizzando che i punti di contatto tra le dita e l'oggetto siano fissi (i.e. le dita non scivolano sulla superficie dell'oggetto)

Un contatto tra il dito e l'oggetto può essere considerato come una trasformazione tra le forze prodotte dal dito nel punto di contatto e le forze/coppie risultanti sull'oggetto rispetto ad un qualsivoglia punto di riferimento.

Come convenzione sceglieremo di localizzare il generico punto di contatto i -esimo con un sistema di riferimento C_i il cui asse zeta z_i è normale alla superficie nel punto di contatto.

Analogamente associeremo all'oggetto un sistema di riferimento O solidale all'oggetto stesso e con origine nel centro di massa.



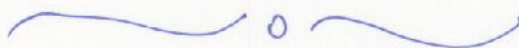
Indicheremo con $T_{O C_i}$ la trasformazione rigida (rototraslazione) che porta da C_i ad O :

$$P^O = T_{O C_i} P^{C_i}$$

essendo P^O e P^{C_i} le coordinate del medesimo punto P in O e C_i , rispettivamente.

CARATTERIZZAZIONE DEI PUNTI DI CONTATTO

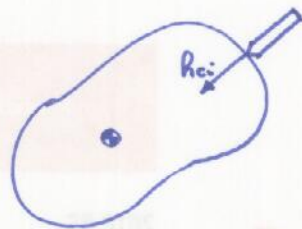
Tipicamente un dito non sarà in grado di esercitare forze in tutte le direzioni ed è quindi possibile caratterizzare i diversi tipi di contatto sulla base delle forze/coppie che sono in grado di generare.



Un punto di contatto senza attrito (frictionless point of contact) si ottiene nel caso in cui non ci sia alcun tipo di attrito tra il dito e l'oggetto. In questo caso, si possono applicare forze solamente lungo la normale alla superficie dell'oggetto.

Nel caso di un contatto senza attrito abbiamo pertanto:

$$h_{ci} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} f_{ci}, \quad f_{ci} \geq 0, \quad f_{ci} \in \mathbb{R}$$



dove il vincolo $f_{ci} \geq 0$ indica che il dito può spingere ma non tirare. Contatti senza attrito non esistono in realtà ma sono un ottimo modello idealizzato per pianificare contatti che non sfruttino le forze di attrito.

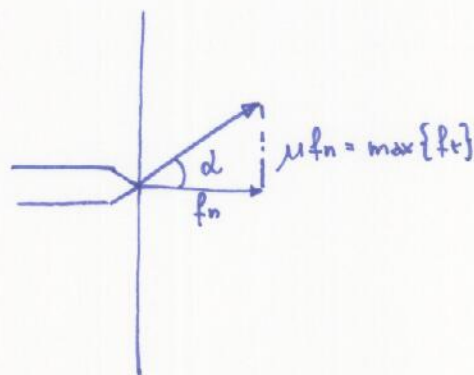
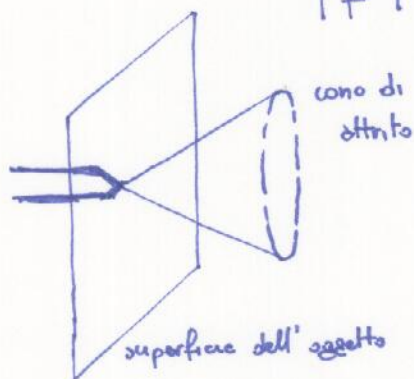


Consideriamo ora un tipo particolare di attrito, l'attrito di Coulomb. Questo modello empirico serve a descrivere un fenomeno che è facile verificare: la forza di attrito tangenziale è proporzionale alla forza normale applicata e la costante di proporzionalità dipende dai materiali di cui sono composte le superfici a contatto. Denotiamo ora con $f^t \in \mathbb{R}$ il modulo della forza tangenziale alla superficie e con $f^n \in \mathbb{R}$ il modulo della forza normale. La legge di Coulomb stabilisce che lo slisciamento avviene nel momento in cui:

$$|f^t| > \mu f^n$$

essendo μ il coefficiente di attrito statico. Questo implica che il range di forze ammissibili è dato da:

$$|f^t| \leq \mu f^n$$



Questa relazione impone che le forze esercitate sull'oggetto debbano rimanere all'interno di un cono con vertice nel punto di contatto. L'angolo di questo cono è dato da:

$$\alpha = \tan^{-1}(\mu)$$

Valori tipici per μ sono minori di 1 e pertanto il cono ha tipicamente un'apertura inferiore a 45° , i.e. $\pi/4$.

Acciaio su acciaio 0.58

Legno su legno 0.25 ÷ 0.5

Gomma su acciaio 1 ÷ 4

Legno su metallo 0.2 ÷ 0.6

Legno su pelle 0.3 ÷ 0.4

Pelle su metallo 0.6

Nel caso in cui sia descrivibile il contatto con un modello con attrito Coulombiano, le forze/coppie che possono essere scambiate con l'oggetto sono descritte come segue:

$$h_{ci} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} f_{ci} \quad f_{ci} \in FC_i$$

$$FC_i = \left\{ f \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \leq \mu f_3, f_3 \geq 0 \right\}$$

$$= \left\{ f \in \mathbb{R}^3 : f = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix}, \sqrt{f_x^2 + f_y^2} \leq \mu f_z, f_z \geq 0 \right\}$$



Un tipo di contatto più realistico è quello così detto soft-finger che consente la generazione di coppie torzionali lungo la normale alla superficie di contatto; anche in questo caso sono ammesse coppie torzionali il cui modulo massimo è proporzionale alla forza normale alla superficie secondo una costante di proporzionalità γ (coefficiente di attrito torzionale).

$$h_{ci} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} f_{ci}, \quad f_{ci} \in FC_i \subset \mathbb{R}^4$$

$$FC_i = \left\{ f \in \mathbb{R}^4 : f = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ \mu_z \end{bmatrix}, \sqrt{f_x^2 + f_y^2} \leq \mu f_z, f_z \geq 0, |\mu_z| \leq \gamma f_z \right\}$$



In generale descriveremo il punto di contatto con (1) una matrice $B_{ci} \in \mathbb{R}^{6 \times m_i}$ che descrive la base per le forze/coppie ammissibili; (2) un cono di attrito FC_i che ha le seguenti proprietà:

- FC_i è un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}^{m_i}$ e $\text{int}(FC_i) \neq \emptyset$
- $f_1 \in FC_i, f_2 \in FC_i \Rightarrow \alpha f_1 + \beta f_2 \in FC_i \quad \alpha > 0, \beta > 0$

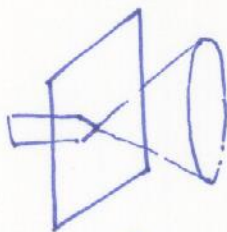
Punto di contatto
senza attrito



$$B_{ci} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$FC_i: f_1 \geq 0$$

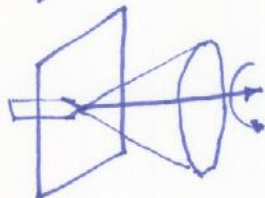
Punto di contatto
con attrito



$$B_{ci} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$FC_i: \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \leq \mu f_3 \\ f_3 \geq 0$$

Punto di contatto
soft finger



$$B_{ci} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$FC_i: \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \leq \mu f_3 \\ f_3 \geq 0 \\ |f_4| \leq \gamma f_3$$

In genere quindi descriveremo sempre il contatto tramite l'insieme delle forze/oppie ammissibili rappresentate come segue:

$$h_{ci} = B_{ci} f_{ci} \quad f_{ci} \in FC_i$$



Cerchiamo ora di determinare l'effetto delle forze di contatto sull'oggetto. Se indichiamo con $T_{oi} = \begin{bmatrix} R_{oi} & P_{oi} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ la generica trasformazione (rotazione

R_{oi} e traslazione p_{oi}) dal contatto i -esimo al sistema di riferimento solidale all'oggetto; allora, le forze di un singolo contatto possono essere portate nel sistema di riferimento dell'oggetto tramite la seguente relazione (si veda ad esempio Siciliano, Siciliano capitolo della cinematica differenziale e della statica):

$$h_o = \begin{bmatrix} R_{oi} & 0 \\ S(p_{oi})R_{oi} & R_{oi} \end{bmatrix} h_{ci}$$

dove abbiamo utilizzato la solita convenzione che rappresenta δx con $S(\delta)$ così definita:

$$S(\delta) = \begin{bmatrix} 0 & -\delta_3 & \delta_2 \\ \delta_3 & 0 & -\delta_1 \\ -\delta_2 & \delta_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix}$$

Utilizzando la struttura di h_{ci} :

$$h_{ci} = B_{ci} f_{ci} \quad f_{ci} \in FC_i$$

otteniamo:

$$h_0 = \begin{bmatrix} R_{oci} & 0 \\ S(p_{oci}) R_{oci} & R_{oci} \end{bmatrix} B_{ci} f_{ci} \quad f_{ci} \in FC_i$$

per cui conviene definire:

$$G_i \triangleq \begin{bmatrix} R_{oci} & 0 \\ S(p_{oci}) R_{oci} & R_{oci} \end{bmatrix} B_{ci} \quad G_i \in \mathbb{R}^{6 \times m_i}$$

Se consideriamo l'effetto di k diversi punti di contatto possiamo costruire una matrice $G: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^6$, $G \in \mathbb{R}^{6 \times m}$ $m = m_1 + m_2 + \dots + m_k$.

$$h_0 = G_1 f_{c1} + \dots + G_k f_{ck} = [G_1 \dots G_k] \begin{bmatrix} f_{c1} \\ \vdots \\ f_{ck} \end{bmatrix}$$

e pertanto definiamo:

$$G = \left[\underbrace{\begin{bmatrix} R_{oc1} & 0 \\ S(p_{oc1}) R_{oc1} & R_{oc1} \end{bmatrix} B_{c1}}_{G_1} \dots \underbrace{\begin{bmatrix} R_{ock} & 0 \\ S(p_{ock}) R_{ock} & R_{ock} \end{bmatrix} B_{ck}}_{G_k} \right]$$

Per cui le forze corpie sull'oggetto saranno descritte come segue:

$$h_0 = G f_c, \quad f_c \in FC$$

$$f_c = \begin{bmatrix} f_{c1} \\ \vdots \\ f_{ck} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad FC = FC_1 \times \dots \times FC_k, \quad m = m_1 + \dots + m_k$$

Definizione: Un affioraggio (grasp) consiste di una matrice $G \in \mathbb{R}^{6 \times m}$ ed un insieme $FC \subset \mathbb{R}^m$ che soddisfanno alle seguenti proprietà:

- FC è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^m$ e l'insieme dei suoi punti interni non è vuoto, i.e. $FC \subset \mathbb{R}^m$, $\text{int}(FC) \neq \emptyset$
- $f_1 \in FC, f_2 \in FC \Rightarrow \alpha f_1 + \beta f_2 \in FC \quad \forall \alpha, \beta > 0$

Esempio: punti di contatto senza attrito

$$h_o = \begin{bmatrix} R_{oi} & 0 \\ S(p_{oi}) R_{oi} & R_{oi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} f_{ci} \quad f_{ci} \geq 0$$

Osservando che:

$$R_{oi} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = n_{ci}$$

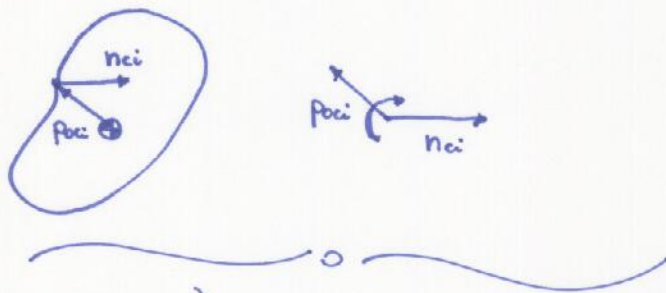
dove n_{ci} è la normale della superficie nel punto di contatto, abbiamo che:

$$h_o = \begin{bmatrix} n_{ci} \\ p_{oi} \times n_{ci} \end{bmatrix} f_{ci}, \quad f_{ci} \geq 0$$

e in presenza di più contatti:

$$h_o = \begin{bmatrix} n_{c1} & \dots & n_{cn} \\ p_{c1} \times n_{c1} & \dots & p_{cn} \times n_{cn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{c1} \\ \vdots \\ f_{cn} \end{bmatrix} \quad f_{ci} \geq 0$$

Cioè il punto di contatto contribuisce anche con un momento torcente:



CHIUSURA DI FORZA (FORCE CLOSURE)

Una proprietà fondamentale nel creare un grasp stabile consiste nel bilanciare le forze/coppie esterne applicate all'oggetto tramite opportune forze/coppie ai punti di contatto delle dita.

Se ad esempio vogliamo sollevare un oggetto sarà necessario generare forze/coppie sull'oggetto tali da contrastare la forza di gravità. A seconda del task che vogliamo compiere sarà quindi necessario resistere a forze e coppie lungo diverse direzioni.

In ogni caso sarà necessario assicurare che le forze applicate dalle dita rimangano sempre all'interno del cono di attrito per evitare scivolamenti.

Definizione: Un grasp è una chiusura di forza (force closure grasp) se per ogni forza/coppia $h \in \mathbb{R}^6$ applicata all'oggetto esiste una forza di contatto $f_c \in FC$ t.c.

$$Gf_c = -h$$

In altri termini, la coppia (G, FC) è una chiusura di forza se l'immagine di FC tramite G copre tutto $\mathbb{R}^6$.

$$G(FC) = \mathbb{R}^6, \quad FC \xrightarrow{G} \mathbb{R}^6$$

Una proprietà fondamentale per ottenere un "force closure" è la possibilità di generare forze interne, ossia di generare forze di contatto che non producano forza/coppia sull'oggetto.

Definizione: Se $f_N \in \ker(G) \cap FC$, allora f_N è una forza interna.

$$Gf_N = 0, \quad f_N \in FC.$$

Se:

$$Gf_N = 0, \quad f_N \in \text{int}(FC)$$

diremo che f_N è una forza interna in senso stretto.

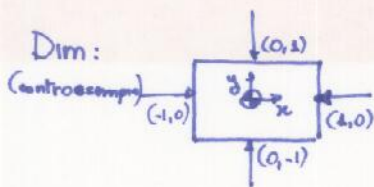
Fatto: (G, FC) è una force closure $\Rightarrow$ esiste una forza interna in senso stretto.

Dim: Si prenda $f_1 \in \text{int}(FC)$ tale che $h_0 = Gf_1 \neq 0$. Allo stesso modo sia $f_2 \in FC$ tale che $Gf_2 = -h_0$ (tale f_2 esiste poiché G, FC è force closure). Allora $f_N = f_1 + f_2$ è una forza interna in senso stretto. Infatti:

$$Gf_N = G(f_1 + f_2) = h_0 - h_0 = 0$$

e $f_N \in \text{int}(FC)$ per le proprietà dei coni.

Fatto: esiste una forza interna in senso stretto $\nexists (G, FC)$ e forze closure



Se i contatti sono tutti senza attrito abbiamo:

$$G_{ci} = \begin{bmatrix} n_{ci} \\ p_{ci} \times n_{ci} \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$FC = \{ f_c \in \mathbb{R}^4 : f_1 \geq 0, f_2 \geq 0, f_3 \geq 0, f_4 \geq 0 \}$$

Sicuramente è possibile generare delle forze interne. Ad esempio:

$$f_N = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad \text{t.c.} \quad G f_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \forall f_1, f_2$$

Quindi il grasp non è force-closure in quanto non è in grado di contrastare coppie lungo l'asse z , cioè $h_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ in quanto $G f_c = \begin{bmatrix} * \\ * \\ 0 \end{bmatrix}$.

Fatto: esiste una forza interna in senso stretto e $G(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^6$, i.e. G è suriettiva $\Rightarrow (G, FC)$ è force closure.

Dim: Si scelga $h_0 \in \mathbb{R}^6$ e si costruisca $f_c' \in \mathbb{R}^m$ t.c.
 $h_0 = G f_c'$

Tale f_c' esiste per ipotesi di suriettività. Sia f_N la forza interna in senso stretto; allora abbiamo che:

$$G(f_c' + \alpha f_N) = h_0 \quad \forall \alpha$$

e pertanto non ci resta che dimostrare che $\exists \alpha$ t.c. $f_c' + \alpha f_N \in \text{int}(FC)$.

Si noti che:

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{f_c' + \alpha f_N}{\alpha} = f_N \in \text{int}(FC)$$

e pertanto deve esistere un valore sufficientemente grande di α t.c.:

$$\frac{f_c' + \alpha' f_N}{\alpha'} \in \text{int}(FC)$$

Ora per le proprietà del cono ($f_c \in FC \Rightarrow f_c \alpha \in FC \quad \forall \alpha > 0$) allora che anche $f_c \triangleq f_c' + \alpha' f_N \in \text{int}(FC)$ che conclude la prova.