29/04/2010

CONTROLLO DI IMPEDENZA

Abbiamo visto come il controllore PD con compensazione della gravità si comporti all'equilibrio come un'impedenza elastica K_p regolabile a piacere. È possibile tuttavia applicare leggi di controllo che consentano di regolare a piacere non solo il comportamento statico (all'equilibrio) ma anche quello dinamico.

Si consideri ad esempio il seguente sistema:

$$B(q)\ddot{q} + \underbrace{n(q,\dot{q})}_{C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q)} = \tau$$

con il controllore "coppia calcolata":

$$\tau = B(q)\left[\ddot{q}_d - K_p(q-q_d) - K_d(\dot{q}-\dot{q}_d)\right] + n(q,\dot{q})$$

che porta a:

$$\cancel{B(q)}\ddot{q} + \cancel{n(q,\dot{q})} = \cancel{B(q)}\left[\ddot{q}_d - K_p(q-q_d) - K_d(\dot{q}-\dot{q}_d)\right] + \cancel{n(q,\dot{q})}$$

$$(\ddot{q} - \ddot{q}_d) + K_d(\dot{q}-\dot{q}_d) + K_p(q-q_d) = 0$$

cioè l'errore di inseguimento ha una dinamica determinata dai parametri K_d e K_p. Modificando la legge di controllo come segue:

$$\tau = B(q)\left[\ddot{q}_d - M_d^{-1}K_p(q-q_d) - M_d^{-1}K_d(\dot{q}-\dot{q}_d)\right] + n(q,\dot{q})$$

si ottiene la seguente dinamica:

$$M_d(\ddot{q}-\ddot{q}_d) + K_d(\dot{q}-\dot{q}_d) + K_p(q-q_d) = 0$$

In presenza di una coppia esterna del tipo τ_{ext}:

$$M_d(\ddot{q}-\ddot{q}_d) + K_d(\dot{q}-\dot{q}_d) + K_p(q-q_d) = \cancel{\tau_{ext}} = M_d B^{-1}(q)\tau_{ext}$$

cioè il sistema reagisce alla coppia esterna con una dinamica decidibile arbitrariamente a meno del fatto che τ_{ext} viene premoltiplicato per $M_d B^{-1}(q)$.

Per avere una dinamica completamente arbitraria in risposta ad una coppia esterna τ_{ext} è necessario eliminare il contributo $M_d B^{-1}(q)$. A tal scopo, è necessario misurare τ_{ext} ed inserirlo nella legge di controllo:

$$\tau = B(q)\left[\ddot{q}_d - M_d^{-1} K_p (q-q_d) - M_d^{-1} K_d (\dot{q}-\dot{q}_d) - M_d^{-1}\tau_{ext}\right] + n(q,\dot{q}) + \tau_{ext}$$

da cui si ottiene:

$$\cancel{\tau_{ext}} + B(q)\ddot{q} + \cancel{n(q,\dot{q})} = B(q)\left[\ddot{q}_d - M_d^{-1} K_p (q-q_d) - M_d^{-1} K_d (\dot{q}-\dot{q}_d) - M_d^{-1}\tau_{ext}\right] + \cancel{n(q,\dot{q})} + \cancel{\tau_{ext}}$$

$$M_d(\ddot{q}-\ddot{q}_d) + K_p(q-q_d) + K_d(\dot{q}-\dot{q}_d) = \tau_{ext}$$

cioè il sistema risponde alla coppia esterna τ_{ext} comportandosi come un sistema lineare arbitrario descritto da M_d, K_p, K_d.

TASK SPACE IMPEDANCE CONTROL: CONTROLLO DI IMPEDENZA NELLO SPAZIO OPERAZIONALE

$$B(q)\ddot{q} + \underbrace{C(q,\dot{q}) + g(q)}_{\triangleq n(q,\dot{q})} = \tau + J^T(q) h_{ext}$$

$$\dot{x} = J_A(q)\dot{q}, \quad \ddot{x} = J_A(q)\ddot{q} + \dot{J}_A(q)\dot{q} \qquad \text{dove} \quad \ddot{q} = B^{-1}(q)\left[\tau - n(q,\dot{q}) + J^T(q) h_{ext}\right]$$

$$\ddot{x} = J_A(q) B^{-1}(q)\left[\tau - n(q,\dot{q}) - J^T(q) h_{ext}\right] + \dot{J}_A(q)\dot{q}$$

$$= J_A(q)B^{-1}(q)\tau - J_A(q)B^{-1}(q)n(q,\dot{q}) + J_A(q)B^{-1}(q)J^T(q)h_{ext} + \dot{J}_A(q)\dot{q}$$

dove sostituiamo $J(q) = T_A(x) J_A(q)$:

$$\ddot{x} = J_A(q)B^{-1}(q)\tau - J_A(q)B^{-1}(q)n(q,\dot{q}) + J_A(q)B^{-1}(q)J_A^T(q)\underbrace{T_A^T(x) h_{ext}}_{h_{ext,A}} + \dot{J}_A(q)\dot{q}$$

Notiamo che $J_A(q)B^{-1}(q)$ ha, in generale, uno spazio nullo non vuoto per cui utilizzando i proiettori nello spazio nullo abbiamo; $A = J_A(q)B^{-1}(q)$

$$\tau = \underbrace{J_A^T(J_A B^{-1} J_A^T)^{-1}}_{A^+}\underbrace{J_A B^{-1}}_{A}\tau + \underbrace{(I - J_A^T(J_A B^{-1}J_A^T)^{-1}J_A B^{-1})}_{\text{proiettore nello spazio nullo di } J_A B^{-1}}\tau$$

Definendo:

$$h_{int,A} = (J_A B^{-1} J_A^T)^{-1} J_A B^{-1} \tau$$

e sostituendo abbiamo:

$$\ddot{x} = \underbrace{J_A(q) B^{-1}(q) J_A^T(q)}_{\triangleq \tilde{B}^{-1}(q)} h_{int,A} - J_A(q) B^{-1}(q) n(q,\dot{q}) + J_A(q) B^{-1}(q) J_A^T(q) h_{ext,A} + \dot{J}_A(q)\dot{q}$$

$$\tilde{B}(q)\ddot{x} = h_{int,A} - \tilde{B}^{+1}(q) J_A(q) B^{-1}(q) n(q,\dot{q}) - \cancel{\tilde{B}(q) J_A(q) B^{-1}(q) J_A^T(q)} h_{ext,A} + \tilde{B}(q)\dot{J}_A(q)\dot{q}$$

da cui:

$$\tilde{B}(q)\ddot{x} = h_{int,A} + h_{ext,A} - \tilde{n}(q,\dot{q})$$

avendo definito:

$$\tilde{n}(q,\dot{q}) = \tilde{B}(q)\dot{J}_A(q)\dot{q} - \tilde{B}(q) J_A(q) B^{-1}(q)\, n(q,\dot{q})$$

Definendo:

$$h_{int,A} = \tilde{B}(q)\left[\ddot{x}_d - M_d^{-1} K_p(x - x_d) - M_d^{-1} K_d(\dot{x} - \dot{x}_d)\right] + \tilde{n}(q,\dot{q})$$

si trova:

$$M_d(\ddot{x} - \ddot{x}_d) + K_p(x - x_d) + K_d(\dot{x} - \dot{x}_d) = M_d \tilde{B}^{-1}(q) h_{A,ext}$$

Cioè la dinamica di x è definita da M_d, K_p, K_d (parametri del controllo). L'influenza delle forze esterne $h_{A,ext}$ è determinata dal termine non-lineare $M_d \tilde{B}^{-1}(q)$.

Tale termine non-lineare può essere eliminato se si ipotizza che la forza esterna è misurabile. Tipicamente, la misura di $h_{A,ext}$ può essere ottenuta con un sensore di forza coppia posizionato sull' ~~hand~~ end-effector.
Scegliendo:

$$h_{int,A} = \tilde{M}(q)\left[\ddot{x}_d - M_d^{-1} K_p(x - x_d) - M_d^{-1} K_d(\dot{x} - \dot{x}_d) + M_d^{-1} h_{A,ext}\right] + \tilde{n}(q,\dot{q}) - h_{A,ext}$$

si ottiene:

$$M_d(\ddot{x} - \ddot{x}_d) + K_p(x - x_d) + K_d(\dot{x} - \dot{x}_d) = h_{A,ext}$$

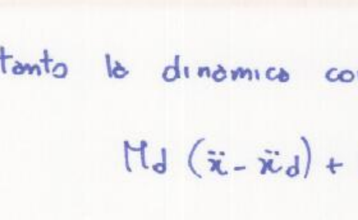
Come già visto in precedenza, se l'ambiente esterno è compliante:

$$h_{A,ext} = K_A(x)(x - x_e), \quad K_A(x) = T_A^T(x)\, K\, T_A(x)$$

e pertanto la dinamica complessiva risulta:

$$M_d(\ddot{x} - \ddot{x}_d) + K_p(x - x_d) + K_d(\dot{x} - \dot{x}_d) = h_{A,ext} = K_A(x)(x - x_e)$$

Esempio:



$$K_A = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Come in precedenza trascuriamo la rotazione, da cui segue che K_A non è funzione della posizione x dell'end-effector. I parametri del nostro controllo sono:

$$M_d = \begin{bmatrix} m_{dx} & 0 \\ 0 & m_{dy} \end{bmatrix}, \quad K_D = \begin{bmatrix} k_{d,x} & 0 \\ 0 & k_{d,y} \end{bmatrix}, \quad K_P = \begin{bmatrix} k_{p,x} & 0 \\ 0 & k_{p,y} \end{bmatrix}$$

La dinamica risultante è la seguente (ipotizziamo $x_d = cost$):

$$\begin{bmatrix} m_{dx} & 0 \\ 0 & m_{dy} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{p}_x \\ \ddot{p}_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{px} & 0 \\ 0 & k_{py} \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{xd} \\ p_{yd} \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} k_{dx} & 0 \\ 0 & k_{dy} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x - x_e \\ y - y_e \end{bmatrix}$$

o per usare la notazione usata in precedenza:

$$\begin{bmatrix} m_{dx} & 0 \\ 0 & m_{dy} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{px} & 0 \\ 0 & k_{py} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x - x_d \\ y - y_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{dx} & 0 \\ 0 & k_{dy} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x - x_e \\ y - y_e \end{bmatrix}$$

Si sono ottenuti cioè due sistemi del secondo ordine completamente disaccoppiati:

$$\begin{cases} m_{dx}\ddot{x} + k_{dx}\dot{x} + (k_{p,x} + k_x)x = k_x x_e + k_{px} x_d \\ m_{dy}\ddot{y} + k_{dy}\dot{y} + k_{py}\, y = k_{py}\, y_d \end{cases}$$

Il polinomio caratteristico del secondo sistema è:

$$s^2 + \frac{k_{dy}}{m_{dy}}s + \frac{k_{py}}{m_{dy}} = s^2 + 2\omega_n \zeta s + \omega_n^2 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k_{py}}{m_{dy}}}, \quad \zeta = \frac{1}{2}\frac{k_{dy}}{m_{dy}}\sqrt{\frac{m_{dy}}{k_{py}}}$$

$$\zeta = \frac{1}{2}\frac{k_{dy}}{\sqrt{m_{dy}\, k_{py}}}$$

Il polinomio caratteristico del primo sistema è:

$$s^2 + \frac{k_{dx}}{m_{dx}}s + \frac{k_{px} + k_x}{m_{dx}} = s^2 + 2\omega_n \zeta s + \omega_n^2 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k_{px} + k_x}{m_{dx}}}, \quad \zeta = \frac{1}{2}\frac{k_{dx}}{m_{dx}}\sqrt{\frac{m_{dx}}{k_{px} + k_x}} = \frac{k_{dx}}{2\sqrt{m_{dx}(k_{px} + k_x)}}$$