

CONTROLLO DI COMPLIENZA

Consideriamo l'equazione dinamica di un manipolatore in presenza di una forza/coppia (i.e. forza generalizzata) che agisce sull' end-effector.

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau - J^T(q)h$$

dove $J(q)$ è lo Jacobiano relativo all' end-effector e $h = \begin{bmatrix} f \\ \tau \end{bmatrix}$ rappresenta la forza generalizzata applicata all' end-effector.

Utilizzando una legge di controllo di tipo PD con compensazione della gravità abbiamo:

$$\tau = g(q) - K_p(q - q_d) - K_d\dot{q}$$

che in presenza di forze esterne nulle ($h=0$) porta a:

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = g(q) - K_p(q - q_d) - K_d\dot{q}$$

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} = -K_p(q - q_d) - K_d\dot{q}$$

che converge globalmente asintoticamente a q_d , i.e. $q \xrightarrow{t \rightarrow \infty} q_d, \forall q(0)$.

Utilizzando una legge di controllo nello spazio operativo di tipo PD con compensazione della gravità:

$$\tau = g(q) - J_A^T K_p(x - x_d) - J_A^T K_d \dot{x}$$

$$= g(q) - J_A^T(q) K_p(x - x_d) - J_A^T K_d \dot{x}$$

$$x = \begin{bmatrix} p \\ \phi \end{bmatrix}$$

↑ posizione 3D
↑ angoli di Eulero

dove $J_A(q)$ è lo Jacobiano analitico legato allo Jacobiano geometrico $J(q)$ dalla relazione: $J(q) = T_A(\phi) J_A(q)$ essendo ϕ gli angoli di Eulero

che descrivono l'orientazione dell' end-effector e:

$$T_A(\phi) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T(\phi) \end{bmatrix}, \quad T_A^*(\phi) = \begin{bmatrix} 0 & -s_\phi & c_\phi s_\theta \\ 0 & c_\phi & s_\phi s_\theta \\ 1 & 0 & c_\theta \end{bmatrix}, \quad \phi = \begin{bmatrix} \psi \\ \theta \\ \gamma \end{bmatrix} \quad \text{Angoli di Eulero}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = J_A(q) \dot{q}, \quad \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = J(q) \dot{q} = T_A(\phi) \cdot \dot{x}$$

Sotto l'ipotesi di Jacobiano a rango di riga pieno, si può dimostrare la convergenza globale e asintotica di x a x_d , i.e. $x \xrightarrow{t \rightarrow \infty} x_d, \forall \phi(0)$.

~ o ~
Che cosa succede nei controllori appena descritti in presenza di una coppia esterna. Nel primo caso abbiamo:

$$\tau = g(q) - K_p(q - q_d) - K_d \dot{q} + \tau_{ext}$$

che porta a:

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} = -K_p(q - q_d) - K_d \dot{q} + \tau_{ext}$$

che ha come condizione di equilibrio:

$$-K_p(q - q_d) = \tau_{ext} \Rightarrow \Delta q = q - q_d = -K_p^{-1} \cdot \tau_{ext}$$

cioè l'errore in posizione è inversamente proporzionale a K_p . In sostanza in presenza di coppie esterne che agiscono sui giunti (τ_{ext}) il manipolatore si comporta (all'equilibrio) come una molla torsionale la cui costante elastica K_p è un parametro del controllore.

~ o ~
Se consideriamo il controllore nello spazio operazionale, in presenza di una forza generalizzata h_{ext} , abbiamo:

$$\tau = g(q) - J_A^T(q) K_p(x - x_d) - J_A^T(q) K_d \dot{x} + J^T(q) h_{ext}$$

che porta a:

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} = -J_A^T(q) K_p(x - x_d) - J_A^T(q) K_d \dot{x} + J^T(q) h_{ext}$$

All'equilibrio, deve valere la seguente:

$$J_A^T(q) K_p(x - x_d) = J^T(q) h_{ext}$$

$$J_A^T(q) K_p(x - x_d) = J_A^T(q) T_A^T(x) h_{ext}$$

Nell'ipotesi di Jacobiano a rango di riga pieno (configurazione non singolare), sappiamo che $J_A J_A^T$ è invertibile e moltiplicando per $(J_A J_A^T)^{-1} J_A$ a sinistra otteniamo:

$$-K_p(x-x_d) = \cancel{J_A^T(q)} T_A^T(x) h_{ext}$$

$$x-x_d = -K_p^{-1} \cancel{J_A^T(q)} \underbrace{T_A^T(x) h_{ext}}_{\hat{=} h_{A,ext}} = -K_p^{-1} h_{A,ext}$$

Ancora una volta, il sistema si comporta come una molla di compliance (i.e. cedevolezza) determinata da K_p (che è un parametro di progetto) e da $T_A(x) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T(\phi) \end{bmatrix}$ che introduce (ma solamente per la compliance torsionale) una dipendenza dalla configurazione x del manipolatore attraverso $T_A(x)$.

AMBIENTE ESTERNO COMPLIANTE (I.E. CON CEDevolezza)

Per ora abbiamo ipotizzato che le forze e le coppie esterne, τ_{ext} e h_{ext} , fossero costanti. Un modello diverso consiste nell'ipotizzare un ambiente "elasticamente compliant":

$$h_{ext} = \begin{bmatrix} f_{ext} \\ \tau_{ext} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} K_f & 0 \\ 0 & K_\mu \end{bmatrix}}_{\hat{=} K_{T_A(x)}} T_A(x) (x-x_e) = \boxed{K = K^T \geq 0}$$

dove x_e rappresenta la configurazione in cui l'ambiente non produce alcuna forza, cioè la posizione di equilibrio.

$$h_{A,ext} = T_A^T(x) K T_A(x) (x-x_e) = K_A(x) (x-x_e) \Rightarrow K_A = K_A^T \geq 0$$

$K_A(x)$: resistenza ambientale (stiffness)

$K_A^{-1}(x)$: cedevolezza ambientale (compliance)

All'equilibrio quindi deve valere la seguente relazione:

$$x-x_d = -K_p^{-1} K_A(x) (x-x_e)$$

$$[I + K_p^{-1} K_A(x)] x = x_d + K_p^{-1} K_A(x) x_e$$

the matrix is invertible if $K_p > 0$

$$x_{eq} = [I + K_p^{-1} K_A(x)]^{-1} (x_d + K_p^{-1} K_A(x) x_e)$$

cui corrisponde la seguente forza all'equilibrio:

$$\begin{aligned} [h_{A, \text{ext}}]_{\infty} &= K_A(x) \left[(I + K_P^{-1} K_A(x))^{-1} (x_d + K_P^{-1} K_A(x) x_e) - x_e \right] \\ &= K_A(x) (I + K_P^{-1} K_A(x))^{-1} (x_d + \cancel{K_P^{-1} K_A(x) x_e} - x_e - \cancel{K_P^{-1} K_A(x) x_e}) \\ &= K_A(x) (I + K_P^{-1} K_A(x))^{-1} (x_d - x_e) \end{aligned}$$

- La posizione di equilibrio dipende da x_d e x_e ma soprattutto dal peso relativo di K_P e $K_A(x)$ attraverso $K_P^{-1} K_A(x)$.
- Essendo K_P un parametro di progetto è opportuno scegliere K_P in funzione di $K_A(x)$, cioè rigidità elevata del manipolatore lungo le direzioni in cui anche l'ambiente presenta una rigidità elevata.



Consideriamo infine un caso in cui il controllo PD con compensazione della gravità è perturbato da una forza generalizzata h_{ext} :

$$\begin{aligned} \tau &= g(q) - K_P(q - q_d) - K_D \dot{q} \\ B(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q) &= \tau - J^T(q) h_{\text{ext}} \end{aligned}$$

da cui otteniamo:

$$B(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} = -K_P(q - q_d) - K_D \dot{q} - J^T(q) h_{\text{ext}}$$

che ha il seguente punto di equilibrio:

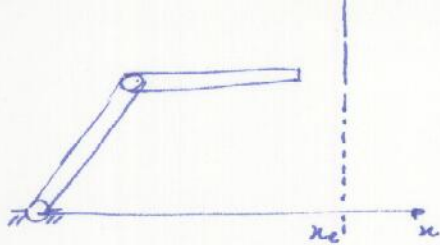
$$\begin{aligned} -K_P(q - q_d) &= J^T(q) h_{\text{ext}} \\ q - q_d &= -K_P^{-1} J^T(q) h_{\text{ext}} \\ &= -K_P^{-1} J_A^T(q) T_A^T(x) h_{\text{ext}} \\ &= -K_P^{-1} J_A^T(q) h_{A, \text{ext}} \end{aligned}$$

Per piccole variazioni di posizione, $q - q_d \approx 0 \Rightarrow x - x_d \approx J_A(q)(q - q_d)$:

$$x - x_d \approx -J_A(q) K_P^{-1} J_A^T(q) h_{A, \text{ext}}$$

cioè si ottiene una matrice di cedevolezza all'end-effector $J_A(q) K_P^{-1} J_A^T(q)$ dipendente dalla configurazione del manipolatore.

Esempio:



Consideriamo come end-effector la sola posizione cartesiana, cioè trascuriamo la rotazione. Pensando alla parete come ad un contatto puramente senza attrito abbiamo

$$K_A = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad k_y = 0, \text{ nessuna forza verticale}$$

$$K_P = \begin{bmatrix} k_{p,x} & 0 \\ 0 & k_{p,y} \end{bmatrix} \quad \text{parametro di progetto}$$

Per non confondere la rotazione, chiamiamo p la posizione dell'end-effector (solitamente indicata con x) per cui abbiamo:

$$p = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad p_d = \begin{bmatrix} x_d \\ y_d \end{bmatrix}$$

$$p_{\infty} = \begin{bmatrix} \frac{x_d + (k_{p,x})^{-1} k_x x_e}{1 + (k_{p,x})^{-1} k_x} \\ y_d \end{bmatrix} \quad (f_{\text{ext}})_{\infty} = \begin{bmatrix} \frac{k_x (x_d - x_e)}{1 + (k_{p,x})^{-1} k_x} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$p_{\infty} = \begin{bmatrix} \frac{k_{p,x} x_d + k_x x_e}{k_{p,x} + k_x} \\ y_d \end{bmatrix} \quad (f_{\text{ext}})_{\infty} = \begin{bmatrix} \frac{k_x k_{p,x} (x_d - x_e)}{k_{p,x} + k_x} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quindi, poiché la rigidità verticale dell'ambiente è nulla, la posizione di equilibrio y_d è raggiunta anche per valori piccoli di $k_{p,y}$.

Invece, poiché la rigidità orizzontale dell'ambiente è pari a k_x , x_e e x_d contribuiscono alla posizione finale secondo i valori di $k_{p,x}$ e k_x

$$\bullet \quad k_{p,x} \gg k_x \quad \Rightarrow \quad x_{\infty} \cong x_d \quad (f_{\text{ext}})_{\infty} \cong k_x (x_d - x_e)$$

$$\bullet \quad k_{p,x} \ll k_x \quad \Rightarrow \quad x_{\infty} \cong x_e \quad (f_{\text{ext}})_{\infty} \cong k_x (x_d - x_e)$$