ESEMPIO

Sistema: $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t) - x_2(t) + u(t) \end{cases}$

Costo: $J(u) = \int_0^T \left[x_1^2(t) + \frac{1}{2} x_2^2(t) + \frac{1}{4} u^2(t) \right] dt$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = 1/2$$

svolgendo: $\begin{cases} \dot{k}_{11} = 2(k_{12}^2 - 2k_{12} - 1) \\ \dot{k}_{12} = 2k_{12}k_{22} - k_{11} + k_{12} - 2k_{22} \\ \dot{k}_{22} = 2k_{22}^2 - 2k_{12} + 2k_{22} - 1 \end{cases}$

condizioni al contorno $\quad k_{11}(T) = k_{12}(T) = k_{22}(T) = Q_f = 0$

$$u^*(t) = -2 \begin{bmatrix} k_{12}(t) & k_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

<u>Caso particolare per $T = \infty$:</u>

Se $\begin{cases} (A,B) \text{ è controllabile} \\ Q_f = 0 \\ (A,B,R,Q) \text{ stazionarie} \end{cases}$ allora $K(t)$ è costante per $t_f \to \infty$

$K(t)$ stazionaria si determina risolvendo

$$0 = -KA - A^T K - Q + KBR^{-1}B^T K \qquad (\dot{K} = 0)$$

CONTROLLO OPEN-LOOP LQ con stato finale dato e minimizzazione dell'energia del comando

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad e \quad x(t_f) \text{ dato}$$

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} u^T R u \, dt$$

Q_f è generalmente nullo poiché peserebbe una quantità nota $(x(t_f))$

La posizione $Q=0$ ci permette di trovare una soluzione analitica al problema

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - BR^{-1}B^T p \\ \dot{p} = -A^T p \end{cases}$$

L'equazione del costato è indipendente dall'equazione dello stato

Soluzione per il costato: $p(t) = e^{A^T(t_f - t)} \underbrace{p(t_f)}_{\text{incognito}}$

l'integrazione comincia per $t = t_f$ e procede indietro nel tempo

Sostituendo: $$\dot{x} = Ax - BR^{-1}B^T e^{A^T(t_f - t)} p(t_f)$$

Soluzione per lo stato: $$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) - \underbrace{\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} BR^{-1}B^T e^{A^T(t_f-\tau)} d\tau}_{\text{gramiano di controllabilità } G(t_0,t)} p(t_f)$$

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) - G(t_0,t)\, p(t_f)$$

Determiniamo il valore di $p(t_f)$ imponendo che in $t = t_f$ $x(t=t_f) = x(t_f)$ dato

$$p(t_f) = -G^{-1}(t_0,t_f)\left[x(t_f) - e^{A(t_f-t_0)} x(t_0)\right]$$

Controllo: $$u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)p^*(t) =$$
$$= R^{-1}B^T e^{A^T(t_f-t)} G^{-1}(t_0,t_f)\Big[x(t_f) - \underbrace{e^{A(t_f-t_0)} x(t_0)}_{\text{soluzione nel caso omogeneo}}\Big];$$

⊖ Il controllo è proporzionale alla differenza $x(t_f) - e^{A(t_f-t_0)} x(t_0)$

⊖ Il controllo è open-loop poiché non c'è una esplicita dipendenza da $x(t)$: è precalcolato e poi applicato: se insiste una perturbazione sullo stato $x(t)$ durante la traiettoria, allora non c'è una compensazione che assicuri che $x(t_f)$ sia quello voluto.

⊖ per avere l'esistenza di $G^{-1}(t_0,t_f)$ deve essere $|G(t_0,t_f)| \neq 0$ che corrisponde ad avere la coppia (A,B) controllabile.

Trasformazione in legge di retroazione:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + G(t_0,t)\, G^{-1}(t_0,t_f)\left[x(t_f) - e^{A(T-t_0)} x(t_0)\right]$$

Da questa equazione si ricava $x(t_0)$ in funzione di $x(t)$ e $x(t_f)$
Si sostituisce $x(t_0)$ nella legge open-loop di $\overset{*}{u}(t)$ ottenendo una formulazione del tipo:

$$\overset{*}{u}(t) = g(t)\, x(t) + h(t)$$

Nota: è comunque un artificio matematico.
Non si ottiene infatti una legge proporzionale del tipo $u^*(t) = F(t)\, x(t)$

- Infatti: poiché $Q=0$ $p(t)$ non dipende da $x(t)$ e non può scriversi $p(t) \triangleq K(t)\, x(t)$; $K(t)$ ricordiamo che appare nella formula di $F(t)$
- Un'altra evidenza viene dal fatto che $K(t) \triangleq \phi_{22}^{-1}(-\phi_{21})$ per $Q_f=0$ ma $\phi_{21}=0$ per $Q=0$
- D'altronde avendo imposto $Q=0$ ne deriviamo vincoli di ottimalità solo su u che è tale per cui x evolve verso $x(t_f)$ con blande proprietà di robustezza: la mancata retroazione dello stato x sul costato $p(t)$ diminuisce le proprietà di reiezione di disturbi: l'artificio matematico che permette di scrivere la formulazione feedback non è molto d'aiuto.

ESERCIZIO:

trovare l'espressione del polinomio che codifica la traiettoria minimum-jerk seguendo l'approccio LQ
Il costo da minimizzare è $J = \frac{1}{2}\int_0^T \dddot{x}(t)^2\, dt$ nell'intervallo $[0,T]$

Si pone: $\dddot{x} = u$

Il sistema è del terz'ordine e va ricondotto alla forma canonica:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B} u \qquad \text{con } Q=0,\; R=1,\; Q_f=0$$

e $X(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X(T) = \begin{pmatrix} x_f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

La matrice A è nilpotente di ordine 3 $\Rightarrow A^3 = 0$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'esponenziale di matrice può dunque facilmente risolversi:

$$e^{At} = I_3 + A + \frac{A^2}{2} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per facilità di calcolo determineremo $u = \dddot{x}$ anziché $x(t)$ e mostreremo come $u^*(t)$ sia proprio pari alla derivata terza del ben noto polinomio

$$x(t) = x_0 + \Delta x \left(10\left(\frac{t}{T}\right)^3 - 15\left(\frac{t}{T}\right)^4 + 6\left(\frac{t}{T}\right)^5 \right) \qquad \Delta x = x_f - x_0$$

$$\dddot{x}(t) = \frac{\Delta x}{T^3}\left(60 - 360\left(\frac{t}{T}\right) + 360\left(\frac{t}{T}\right)^2 \right)$$

Calcolo del gramiano $\quad G(0,T) = \int_0^T e^{A(T-\tau)} B B^T e^{A^T(T-\tau)} \, d\tau =$

$$= \int_0^T \begin{pmatrix} 1 & T-\tau & \frac{(T-\tau)^2}{2} \\ 0 & 1 & T-\tau \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ T-\tau & 1 & 0 \\ \frac{(T-\tau)^2}{2} & T-\tau & 1 \end{pmatrix} d\tau =$$

$$= \int_0^T \begin{pmatrix} \frac{(T-\tau)^4}{4} & \frac{(T-\tau)^3}{2} & \frac{(T-\tau)^2}{2} \\ \frac{(T-\tau)^3}{2} & (T-\tau)^2 & T-\tau \\ \frac{(T-\tau)^2}{2} & T-\tau & 1 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} \frac{T^5}{20} & \frac{T^4}{8} & \frac{T^3}{6} \\ \frac{T^4}{8} & \frac{T^3}{3} & \frac{T^2}{2} \\ \frac{T^3}{6} & \frac{T^2}{2} & T \end{pmatrix}$$

$$G^{-1}(0,T) = \begin{pmatrix} \frac{720}{T^5} & -\frac{360}{T^4} & \frac{60}{T^3} \\ -\frac{360}{T^4} & \frac{192}{T^3} & -\frac{36}{T^2} \\ \frac{60}{T^3} & -\frac{36}{T^2} & \frac{9}{T} \end{pmatrix}$$

$$u^*(t) = B^T e^{A^T(T-t)} G^{-1}(0,T) \underbrace{\left[x(T) - e^{A(T)} x(0) \right]}_{\begin{pmatrix} \Delta x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$u^*(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ T-t & 1 & 0 \\ \frac{(T-t)^2}{2} & T-t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{720}{T^5}\Delta x \\ -\frac{360}{T^4}\Delta x \\ \frac{60}{T^3}\Delta x \end{pmatrix} = \left[\frac{360}{T^5}(T-t)^2 - \frac{360}{T^4}(T-t) + \frac{60}{T^3} \right] \Delta x$$

il gruppo $(T-t)$ deriva dall'eq. del costato che è integrato indietro nel tempo

$\leftarrow$ a meno della scala dei tempi