LOCAL MINIMA OF MULTIVARIABLE FUNCTIONS

Local minima of unconstrained functions

Teorema: (necessary) Se $x^* \in \mathbb{R}^n$ è un punto di minimo locale per $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, allora:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^*) = 0$$

■

Teorema: (necessary) Se $x^* \in \mathbb{R}^n$ è un punto di minimo locale di $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$, allora:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^*) = 0 \qquad e \quad H_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^2}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial f^2}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f^2}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f^2}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix} \geq 0$$

■

Teorema: (sufficient) Se $x^* \in \mathbb{R}^n$ è tale che:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^*) = 0 \qquad e \qquad H_f(x^*) > 0$$

allora x^* è minimo locale di $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

■

Local minima of constrained functions

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad s.t. \quad g(x) \leq 0, \quad h(x) = 0$$

$$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \qquad h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$$

KKT necessary conditions:
Karush-Kuhn-Tucker

Se $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ e $x^* \in \mathbb{R}^n$ è un minimo locale di $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ rispetto ai vincoli allora:

$$\exists \mu \in \mathbb{R}^m, \lambda \in \mathbb{R}^l:$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \frac{\partial g_i}{\partial x}(x^*) + \sum_{j=1}^{l} \lambda_j \frac{\partial h_j}{\partial x}(x^*) = 0$$

$$g(x^*) \leq 0, \qquad h(x^*) = 0$$

$$\mu_i \geq 0 \qquad \mu_i g_i(x^*) = 0 \qquad i = 1 \dots m$$

■

CALCOLO DELLE VARIAZIONI

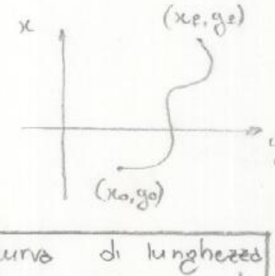
$$x^*(t) = \arg\min_{x} \int_{t_0}^{t_f} L\left(x(\tau), \dot{x}(\tau), t\right) dt \qquad x(t_0) = x_0, \ x(t_f) = x_f,$$

CASO SPECIFICO: x_0, x_f, t_f fissi

Se $x^*(t)$ $t \in [t_0, t_f]$ è un estremo allora:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}\left(x^*(t), \dot{x}^*(t), t\right) - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t), \dot{x}^*(t), t\right) = 0 & \forall t \in [t_0, t_f] \\ x^*(t_0) = x_0 \\ x^*(t_f) = x_f \end{cases}$$

Es:



lunghezza di una curva: $\ell(x(t), y(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dt$

$\boxed{\text{curva di lunghezza minima congiungente due punti sul piano}}$

$$\arg\min_{x(\cdot), y(\cdot)} \int_{t_0}^{t_f} \left[\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) \right]^{\frac{1}{2}} dt, \quad \begin{bmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x(t_f) \\ y(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_f \\ y_f \end{bmatrix}$$

$$L\left(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t\right) = \left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x} \\ \frac{\partial L}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\cancel{2}} \frac{1}{[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{\frac{1}{2}}} \cancel{2}\dot{x} \\ \frac{1}{\cancel{2}} \frac{1}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}} \cancel{2}\dot{y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\ddot{x}\left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right]^{\frac{1}{2}} - \dot{x}\dfrac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{\frac{1}{2}}}}{\left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right]} \\ \dfrac{\ddot{y}\left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right]^{\frac{1}{2}} - \dot{y}\dfrac{\dot{y}\ddot{y} + \dot{x}\ddot{x}}{[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{\frac{1}{2}}}}{\left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\ddot{x}(\cancel{\dot{x}^2} + \dot{y}^2) - \cancel{\dot{x}^2\ddot{x}} - \dot{x}\dot{y}\ddot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \\ \dfrac{\dot{y}\left(\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}\right)}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\dot{y}(\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y})}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \dfrac{-\dot{x}(\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y})}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\dot{y}(\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y})}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \dfrac{-\dot{x}(\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y})}{(\dot{x}^2 + \dot{y})^{\frac{3}{2}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quindi, escludendo il caso banale $\dot{x} = \dot{y} = 0$ (punto fermo che non muovendosi non allunga la curva) deve necessariamente essere $\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y} = 0$

$$\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{\dot{y}}\right)\dot{y}^2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx/dt}{dy/dt}\right)\dot{y}^2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dy}\right)\dot{y}^2 = 0 \implies \frac{dx}{dy} = \text{cost}$$

cioè la derivata della curva $x(y)$ (o analogamente $y(x)$) deve essere costante, che in altri termini corrisponde a richiedere che $x(y)$ sia una retta sul piano x-y. ■

CALCOLO DELLE VARIAZIONI: GENERALIZZAZIONE

$$x^*(t) = \arg\min_{x} \int_{t_0}^{t_f} L\left(x(\tau), \dot{x}(\tau), \dots x^{(n)}(\tau), \tau\right) d\tau \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x(t_f) = x_f \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)} \\ x^{(n-1)}(t_f) = x_f^{(n-1)} \end{cases}$$

CASO SPECIFICO: x_0, x_f, t_f fissi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) + \dots + (-1)^n \dfrac{d^n}{dt^n}\left(\dfrac{\partial L}{\partial x^{(n)}}\right) = 0 \\ x(t_0) = x_0, \ \dots, \ x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)} \\ x(t_f) = x_f, \ \dots, \ x^{(n-1)}(t_f) = x_f^{(n-1)} \end{cases}$$

Es: Minimum Jerk in one dimension

$$\min_{x(\cdot)} \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \left[x^{(3)}(\tau)\right]^2 d\tau \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} x(t_0) = x_0 & x(t_f) = x_f \\ \dot{x}(t_0) = 0 & \dot{x}(t_f) = 0 \\ \ddot{x}(t_0) = 0 & \ddot{x}(t_f) = 0 \end{cases}$$

$$L(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, t) = \dddot{x}^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} - \frac{d^3}{dt^3}\frac{\partial L}{\partial \dddot{x}} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dddot{x}} = 2\dddot{x} \cdot \frac{1}{2} = \dddot{x}$$

$$\frac{d^3}{dt^3}\frac{\partial L}{\partial \dddot{x}} = \frac{d^3}{dt^3}(\dddot{x}) = x^{(6)} = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) \text{ è un polinomio del } 5^\circ \text{ ordine}$$

$$x(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_5 t^5$$

$a_0, \dots, a_5$ sono determinabili univocamente dalle boundary conditions

Senza perdita di generalità, possiamo considerare $t_0 = 0$, $t_f = T$

$$\dot{x} = \cancel{a_1} + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + 5a_5 t^4$$
$$\ddot{x} = \cancel{2a_2} + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + 20a_5 t^3$$

$x(0) = a_0 = x_0 \qquad x(T) = x_0 + \cancel{a_1 T} + \cancel{a_2 T^2} + a_3 T^3 + a_4 T^4 + a_5 T^5 = x_f$

$\dot{x}(0) = a_1 = 0 \qquad \dot{x}(T) = 3a_3 T^2 + 4a_4 T^3 + 5a_5 T^4 = 0$

$\ddot{x}(0) = a_2 = 0 \qquad \ddot{x}(T) = \overset{3}{\cancel{6}} a_3 T + \overset{6}{\cancel{12}} a_4 T^2 + \overset{10}{\cancel{20}} a_5 T^3 = 0$

$$3a_3 T^2 = -4a_4 T^3 - 5a_3 T^4 \qquad 3a_3 T^2 = -4a_4 T^3 - 5a_5 T^4 = 10 a_5 T^3 \cdot T - 5a_5 T^4 = 5a_5$$

$$-4a_4 T^2 - 5a_5 T^3 + 6a_4 T^2 + 10 a_5 T^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2a_4 T^2 = -5a_5 T^3$$

$a_3 T^2 = \frac{5}{3} a_5 T^4$

$a_4 T^2 = -\frac{5}{2} a_5 T^3$

$$\frac{5}{3} a_5 T^4 \cdot T - \frac{5}{2} a_5 T^3 \cdot T^2 + a_5 T^5 = x_f$$

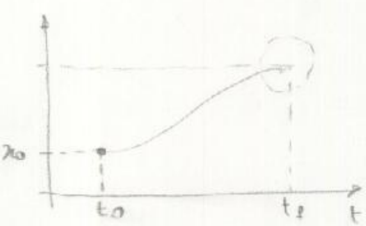
$$\left(1 - \frac{5}{2} + \frac{5}{3}\right) a_5 T^5 = (x_f - x_0) \qquad \frac{6-15+10}{6} = \frac{1}{6} \Rightarrow a_5 = \frac{6(x_f - x_0)}{T^5}$$

$$a_3 = \frac{5}{3} \cancel{T^2} \cdot \frac{6x_f}{T^{\cancel{5}3}} = \frac{10(x_f - x_0)}{T^3}, \quad a_4 = -\frac{5}{2} \cancel{T^3} \cdot \frac{6(x_f - x_0)}{T^{\cancel{5}4}} = -\frac{15(x_f - x_0)}{T^4}$$

$$x(t) = x_0 + \frac{10(x_f - x_0)t^3}{T^3} - 15(x_f - x_0)\left(\frac{t^3}{T^3}\right) + 6(x_f - x_0)\left(\frac{t}{T}\right)^5 \quad \blacksquare$$

OPTIMAL CONTROL PROBLEMS

$$\min_u \underbrace{h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(\tau), u(\tau), \tau)\, d\tau}_{J} \quad \text{s.t.} \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$



Chiamiamo J^* il valore ottimo. Questo valore può essere parametrizzato in t_0 e $x(t_0)$, considerando un generico istante iniziale t ed un generico stato iniziale $x(t)$. In questo caso abbiamo $J^*(x(t), t)$ con $t_0 \le t \le t_f$, detta funzione "cost to go" e partire da $x(t)$ al tempo t. Si può dimostrare che $J^*(x(t), t)$ soddisfa la seguente equazione alle derivate parziali:

(Hamilton-Jacobi-Bellman equation) $$\frac{\partial J^*}{\partial t}(x(t), t) + H\left(x(t), u^*\left(x(t), \frac{\partial J^*}{\partial x}, t\right), \frac{\partial J^*}{\partial x}, t\right) = 0$$

con:

$$H\left(x(t), u^*, \frac{\partial J^*}{\partial x}, t\right) = \min_u L(x(t), u(t), t) + \frac{\partial J^*}{\partial x}(x(t), t)\, f(x(t), u(t), t)$$