CALCOLO DELLE VARIAZIONI: TEORIA

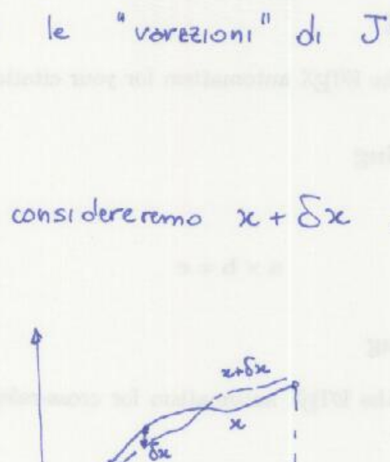
Abbiamo visto che la risoluzione del problema "minimum Jerk" coinvolge la minimizzazione di un funzionale del seguente tipo:

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_f} L(x(\tau), \dot{x}(\tau), \tau)\, d\tau$$

dove $J(\cdot)$ è un funzionale in quanto funzione di $x(\cdot): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

Supponiamo ora di voler calcolare le "variazioni" di $J(\cdot)$ corrispondenti ad opportune "variazioni" di $x(\cdot)$.

Def: Data una funzione $x(\cdot)$, considereremo $x + \delta x$ e chiameremo δx la "variazione" della funzione $x(\cdot)$.



Def: Consideriamo la "~~variazione~~ incremento" di J corrispondente alla variazione δx di x.

$$J(x + \delta x) - J(x) = \Delta J(x, \delta x)$$

Si può dimostrare che ΔJ può essere scritto come segue:

$$\Delta J(x, \delta x) = \delta J(x, \delta x) + g(x, \delta x)\, \|\delta x\|$$

e se:

$$\lim_{\|\delta x\| \to 0} g(x, \delta x) = 0$$

allora diciamo che δJ è la variazione di J valutata in x.

Es:

$$J(x) = \int_0^1 \left[x^2(\tau) + 2x(\tau) \right] d\tau$$

$$\begin{aligned} \Delta J(x, \delta x) &= J(x + \delta x) - J(x) = \\ &= -\int_0^1 \left[x^2(\tau) + 2x(\tau)\right] d\tau + \int_0^1 \left[(x+\delta x)^2 + 2(x + \delta x) \right] d\tau \\ &= \int_0^1 [\delta x]^2 d\tau + \int_0^1 \left[2x(\tau) + 2\right] \delta x(\tau)\, d\tau \qquad \text{dove } \lim_{\|\delta x\| \to 0} \int_0^1 [\delta x(\tau)]^2 d\tau = 0 \end{aligned}$$

per cui:

$$\delta J(x, \delta x) = \int_0^1 \left\{ \left[2x(\tau) + 2\right] \delta x(\tau) \right\} d\tau$$

Teorema (fondamentale del calcolo delle variazioni): se $x^*(\cdot)$ è un estremo per il funzionale $J(\cdot)$, allora la variazione di J valutata in x^* è nulla, cioè:

$$\delta J(x^*, \delta x) = 0 \quad \forall\, \delta x \text{ ammissibile}$$

Teorema (lemma fondamentale nel calcolo delle variazioni): data una funzione continua $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se:

$$\int_{t_0}^{t_1} h(\tau)\, g(\tau) = 0 \quad \forall\, g: [t_0, t_1] \to \mathbb{R}\,,\ g \in \mathcal{C}^0([t_0,t_1])$$

Allora la funzione h è identicamente nulla in $[t_0, t_1]$:

$$h(t) = 0 \quad \forall\, t \in [t_0, t_1]$$

Consideriamo ora il problema (qui ci limitiamo al caso x scalare)

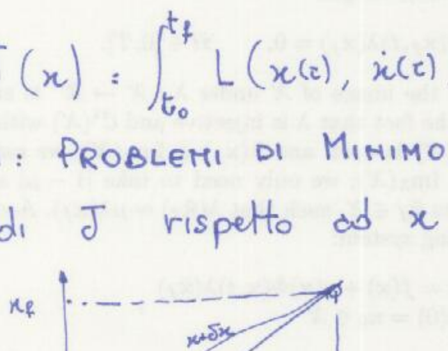
$$x^*(\cdot) = \arg\min_x \int_{t_0}^{t_f} L(x(\tau), \dot{x}(\tau), \tau)\, d\tau \qquad x(t_0) = x_0\,,\ x(t_f) = x_f$$

e chiamiamo:

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} L(x(\tau), \dot{x}(\tau), \tau)\, d\tau$$

CALCOLO DELLE VARIAZIONI: PROBLEMI DI MINIMO NON VINCOLATI

Valutiamo l'incremento di J rispetto ad x:



Si noti che in questo contesto le variazioni di $x(\cdot)$ sono nulle agli estremi dati i vincoli del problema $\delta x(t_0) = 0$ e $\delta x(t_f) = 0$.

$$\Delta J(x, \delta x) = \int_{t_0}^{t_f} L(x(\tau) + \delta x(\tau), \dot{x}(\tau) + \delta \dot{x}(\tau), \tau)\, d\tau - \int_{t_0}^{t_f} L(x(\tau), \dot{x}(\tau), \tau)\, d\tau$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} L(x(\tau) + \delta x(\tau), \dot{x}(\tau) + \delta \dot{x}(\tau), \tau) - L(x(\tau), \dot{x}(\tau), \tau)\, d\tau$$

Utilizziamo la serie di Taylor per espandere l'integrando:

$$L(x(\tau)+\delta x(\tau),\ \dot{x}(\tau)+\delta\dot{x}(\tau),\ \tau) = L(x(\tau),\dot{x}(\tau),\tau) + \frac{\partial L}{\partial x}(x(\tau),\dot{x}(\tau),\tau)\,\delta x(\tau) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x(\tau),\dot{x}(\tau),\tau)\,\delta\dot{x}(\tau) + o(\delta x(\tau), \delta\dot{x}(\tau))$$

Sostituendo queste espansione in $\Delta J(x, \delta x)$:

$$\Delta J(x,\delta x) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial L}{\partial x}(x(\tau),\dot{x}(\tau),\tau)\,\delta x(\tau) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x(\tau),\dot{x}(\tau),\tau)\,\delta\dot{x}(\tau) + \underbrace{o(\delta x(\tau),\delta\dot{x}(\tau))}_{\text{tende a zero per } \|\delta x\|\to 0} \right\} d\tau$$

e ricordandoa la definizione di variazione di J abbiamo

$$\delta J(x,\delta x) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial L}{\partial x}(x(\tau),\dot{x}(\tau),\tau)\,\delta x(\tau) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x(\tau),\dot{x}(\tau),\tau)\,\delta\dot{x}(\tau) \right\} d\tau$$

dove è importante notare che le variazioni di x e $\dot{x}$ sono legate tra di loro dalla seguente relazione:

$$\delta x(t) = \int_{t_0}^{t} \delta\dot{x}(\tau)\,d\tau + \delta x(t_0)$$

cioè δx determina univocamente $\delta\dot{x}$.

Ricordiamo ora la formula degli integrali per parti

$$\frac{d}{dt}\left(g(t)f(t)\right) = f(t)\frac{d}{dt}g(t) + g(t)\frac{d}{dt}f(t) = f(t)\dot{g}(t) + g(t)\dot{f}(t)$$

che integrata:

$$\int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt}(gf)(\tau)\,d\tau = \int_{t_0}^{t_f} f(\tau)\dot{g}(\tau)\,d\tau + \int_{t_0}^{t_f} \dot{f}(\tau)g(\tau)\,d\tau$$

$$g(t)f(t)\Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} f(\tau)\dot{g}(\tau)\,d\tau = \int_{t_0}^{t_f} \dot{f}(\tau)g(\tau)\,d\tau$$

Pertanto:

$$\int_{t_0}^{t_f} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x(\tau),\dot{x}(\tau),\tau)}_{g(\tau)}\ \underbrace{\delta\dot{x}(\tau)}_{\dot{f}(\tau)}\,d\tau = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x(t),\dot{x}(t),t)\,\delta x\Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x(\tau),\dot{x}(\tau),\tau)\,\delta x(\tau)\,d\tau$$

$$= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x(t_f),\dot{x}(t_f),t_f)\,\delta x(t_f) - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x(t_0),\dot{x}(t_0),t_0)\,\delta x(t_0) - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x(\tau),\dot{x}(\tau),\tau)\,\delta x(\tau)\,d\tau$$

Riassumendo quindi le variazione di J è:

$$\delta J(x,\delta x) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\left(x(t_f), \dot{x}(t_f), t_f\right)\delta x(t_f) - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\left(x(t_0), \dot{x}(t_0), t_0\right)\delta x(t_0) + \int_{t_0}^{t_f}\left[\frac{\partial L}{\partial x}\left(x(\tau), \dot{x}(\tau), \tau\right)\delta x(\tau) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\left(x(\tau), \dot{x}(\tau), \tau\right)\delta x(\tau)\right] d\tau$$

1° Caso particolare: $x(t_0) = x_0$, $x(t_f) = x_f$ $\Rightarrow$ $\delta x(t_0) = 0$, $\delta x(t_f) = 0$. Inoltre ricordando il teorema fondamentale del calcolo delle variazioni deve risultare:

$$\delta J(x^*, \delta x) = 0 \quad \forall\, \delta x \text{ ammissibile}$$

$$\delta J(x^*, \delta x) = \int_{t_0}^{t_f}\left\{\left[\frac{\partial L}{\partial x}(x^*(\tau), \dot{x}^*(\tau), \tau) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x^*(\tau), \dot{x}^*(\tau), \tau)\right]\delta x(\tau)\right\} d\tau = 0 \quad \forall \delta x$$

e ricordando il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni:

$$\frac{\partial L}{\partial x}\left(x^*(t), \dot{x}^*(t), t\right) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t), \dot{x}^*(t), t\right) = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_f]$$

che è proprio l'equazione di Eulero - Lagrange.

2° Caso particolare: $x(t_0) = x_0$, $x(t_f)$ libero $\Rightarrow$ $\delta x(t_0) = 0$ ma $\delta x(t_f)$ arbitrario.

$$\delta J(x^*, \delta x) = 0 \quad \forall\, \delta x, \delta x(t_f)$$

$$\delta J(x^*, \delta x) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f\right)\delta x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f}\left\{\frac{\partial L}{\partial x}\left(x^*(\tau), \dot{x}^*(\tau), \tau\right) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x^*(\tau), \dot{x}^*(\tau), \tau)\right\}\delta x(\tau)\, d\tau = 0$$

da cui due condizioni:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f\right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}\left(x^*(t), \dot{x}^*(t), t\right) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t), \dot{x}(t), t\right) = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_f]$$

3° Caso particolare: $x(t_0) = x_0$, x_f libero, t_f libero. Definiamo in modo leggermente diverso l'incremento di J:

$$\Delta J(x, \delta x, \delta t_f) = \int_{t_0}^{t_f+\delta t_f} L(x(\tau)+\delta x(\tau), \dot{x}(\tau)+\delta\dot{x}(\tau), \tau)\, d\tau - \int_{t_0}^{t_f} L(x(\tau), \dot{x}(\tau), \tau)\, d\tau$$

che possiamo riscrivere come segue:

$$\Delta J(x, \delta x, \delta t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \left[L(x(\tau)+\delta x(\tau), \dot{x}(\tau)+\delta\dot{x}(\tau), \tau) - L(x(\tau), \dot{x}(\tau), \tau) \right] d\tau + \int_{t_f}^{\delta t_f + t_f} L(x(\tau)+\delta x(\tau), \dot{x}(\tau)+\delta\dot{x}(\tau))\, d\tau$$

in cui compaiono due addendi. Il primo è esattamente quello che abbiamo già sviluppato. Il secondo invece:

$$\int_{t_f}^{t_f+\delta t_f} L(x(\tau)+\delta x(\tau), \dot{x}(\tau)+\delta\dot{x}(\tau))\, d\tau =$$

$$= L(x(t_f)+\delta x(t_f), \dot{x}(t_f)+\delta\dot{x}(t_f), t_f)\, \delta t_f + o(\delta t_f)$$

Sviluppando in serie di Taylor:

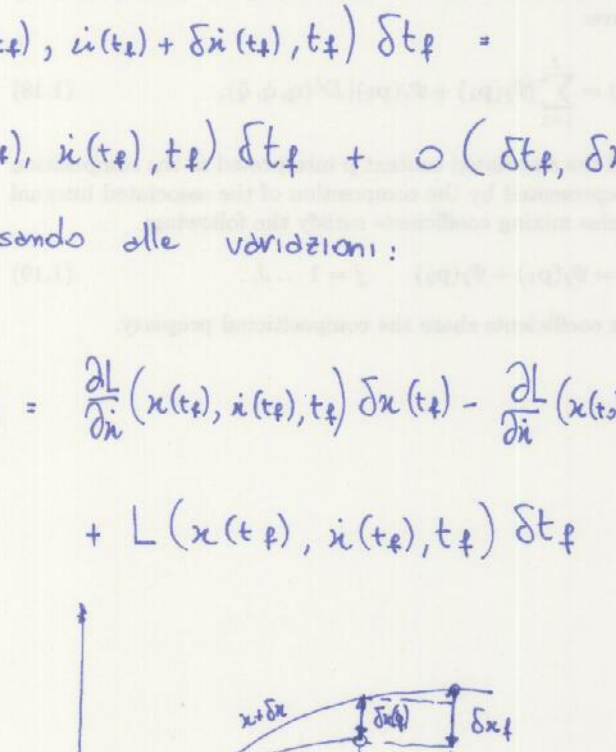
$$L(x(t_f)+\delta x(t_f), \dot{x}(t_f)+\delta\dot{x}(t_f), t_f)\, \delta t_f =$$

$$= L(x(t_f), \dot{x}(t_f), t_f)\, \delta t_f + o(\delta t_f, \delta x(t_f), \delta\dot{x}(t_f))$$

e quindi passando alle variazioni:

$$\delta J(x, \delta x, \delta t_f) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x(t_f), \dot{x}(t_f), t_f)\, \delta x(t_f) - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x(t_0), \dot{x}(t_0), t_0)\, \delta x(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \delta x\, d\tau$$

$$+ L(x(t_f), \dot{x}(t_f), t_f)\, \delta t_f$$



$$\delta x_f = \delta x(t_f) + \dot{x}(t_f)\, \delta t_f$$

$$\delta J(x, \delta x, \delta t_f) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\left(x(t_f), \dot{x}(t_f), t_f\right)\left(\delta x_f - \dot{x}(t_f)\,\delta t_f\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\left(x(t_0), \dot{x}(t_0), t_0\right)\delta x_0$$

$$+ \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\delta x \, d\tau + L\left(x(t_f), \dot{x}(t_f), t_f\right)\delta t_f$$

$$= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\left(x(t_f), \dot{x}(t_f), t_f\right)\delta x_f - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\left(x(t_0), \dot{x}(t_0), t_0\right)\delta x_0$$

$$+ \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\delta x \, d\tau$$

$$+ \left[L\left(x(t_f), \dot{x}(t_f), t_f\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\left(x(t_f), \dot{x}(t_f), t_f\right)\dot{x}(t_f)\right]\delta t_f$$

Ancora una volta sfruttando il teorema fondamentale:

$$\delta J(x^*, \delta x, \delta t_f) = 0 \quad \forall\, \delta x, \delta t_f$$

che nel nostro particolare caso porta alle seguenti condizioni:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f\right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}\left(x^*(t), \dot{x}^*(t), t\right) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t), \dot{x}^*(t), t\right) = 0 \qquad \forall t \in [t_0, t_f]$$

$$L\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f\right)\dot{x}^*(t_f) = 0$$

Nel caso in cui $x(\cdot)$ sia un vettore in $\mathbb{R}^n$ si può dimostrare in maniera del tutto analoga che un estremo x^* deve soddisfare alle seguenti condizioni:

$$\frac{\partial L}{\partial x}\left(x^*(t), \dot{x}^*(t), t\right) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t), \dot{x}^*(t), t\right) = 0$$

$$\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f\right)\right]^T \delta x_f +$$

$$+ \left\{ L\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f\right) - \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\left(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f\right)\right]^T \dot{x}^*(t_f)\right\}\delta t_f = 0$$

∎